Prova Intermedia di Meccanica e Termodinamica

26 **giugno** 2017

problema 1 Una pallottola di massa $m_p = 10g$ viene sparata orizzontalmente contro un blocco di massa $m_b = 0.5\,kg$, inizialmente in quiete sul bordo di un tavolo di altezza $h = 1.25\,m$. Il proiettile si conficca nel blocco e, dopo l'urto, quest'ultimo cade dal tavolo, atterrando sul pavimento a distanza $d = 2\,m$ dal piede del tavolo. Calcolare la velocità iniziale del proiettile.

problema 2 Una palla da bowling di massa m e raggio R (e momento di inerzia $I = \frac{2}{5}mR^2$, rispetto al centro di massa) è lanciata in orizzontale al livello del pavimento, in modo che la sua velocità iniziale sia $v_0 = 7\,m/s$ e che la sua velocità angolare iniziale sia nulla. Se il coefficiente di attrito dinamico tra palla e pavimento vale $\mu_d = 0.1$, determinare quanto tempo passa prima che la palla inizi a rotolare senza strisciare. Determinare, inoltre, il rapporto tra l'energia cinetica posseduta nella fase di rotolamento e l'energia cinetica iniziale della palla.

problema 3 Una mole di gas perfetto monoatomico si trova nello stato A, con temperatura $T_A = 300\,K$ e volume V_A. Essa subisce un'espansione isoterma reversibile $A \to B$ che ne raddoppia il volume: $V_B = 2V_A$. In seguito, si effettua una seconda trasformazione reversibile $B \to C$ a volume costante, che ne diminuisce la pressione. Infine, una trasformazione adiabatica reversibile $C \to A$ chiude il ciclo. Calcolare il rendimento.

(suggerimento: per iniziare, si mettano in relazione i volumi e le temperature di C ed A, ricordando che $V_C = V_B = 2V_A$, quindi si esprimano lavoro e calore scambiato nelle tre trasformazioni in funzione di T_A e T_C.)

Soluzioni

soluzione 1 Posta v_f la velocità del blocco al momento in cui si stacca dal tavolo, si ha che la sua legge oraria è:

$$x(t) = v_f t\,, \qquad y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_{at} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,, \quad v_f = \frac{d}{t_{at}} = d\sqrt{\frac{g}{2h}}\,.$$

La conservazione della quantità di moto nell'urto fornisce

$$m_p v_0 = (m_p + m_b) v_f \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \left(1 + \frac{m_b}{m_p}\right) v_f\,.$$

Pertanto

$$v_0 = \left(1 + \frac{m_b}{m_p}\right) d\sqrt{\frac{g}{2h}} \simeq 204\, m/s\,.$$

---

soluzione 2 Moto di traslazione (nella direzione di avanzamento):

$$ma = -\mu_d\, m\, g \quad \Rightarrow \quad a = -\mu_d\, g \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 - \mu_d g t\,.$$

Moto di rotazione intorno al centro di massa:

$$I\alpha = \mu_d m g R \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{5}{2}\frac{\mu_d\, g}{R} \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \frac{5}{2}\frac{\mu_d\, g}{R}\, t\,.$$

La condizione di rotolamento si verifica nell'istante t^*, t.c.

$$v(t^*) = R\omega(t^*) \quad \Rightarrow \quad v_0 - \mu_d g t^* = \frac{5}{2}\mu_d\, g t^* \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{2v_0}{7\mu_d\, g} = 2\, s\,.$$

Nella fase di rotolamento, le velocità sono

$$v_f = v(t^*) = \frac{5}{7}v_0\,, \qquad \omega_f = \omega(t^*) = \frac{5}{7}\frac{v_0}{R}\,.$$

Energia cinetica iniziale e finale:

$$E_{cin}^{(i)} = \frac{1}{2}mv_0^2\,, \qquad E_{cin}^{(f)} = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 \equiv \frac{1}{2}m\frac{25}{49}v_0^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{5}{7}\frac{v_0}{R}\right)^2 = \frac{5}{7}\;\frac{1}{2}mv_0^2\,.$$

Il rapporto tra le due energie è, dunque

$$\frac{E_{cin}^{(f)}}{E_{cin}^{(i)}} = \frac{5}{7}\,.$$

---

soluzione 3 Poiché $C \to A$ è una trasformazione adiabatica reversibile, si ha $T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$. Ricordando che $V_C = V_B = 2V_A$, si ottiene

$$T_C = T_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} = T_A\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \simeq 0.63 T_A \simeq 199\, K\,.$$

Conoscendo T_A e T_C, si possono valutare calore scambiato e lavoro per ognuna delle tre trasformazioni.

<u>ramo $A \to B$</u>

$$Q_{A\to B} = L_{A\to B} = \int_A^B P dV = \int_A^B nRT_A\,\frac{dV}{V} = nRT_A\,\ln 2\,.$$

<u>ramo $B \to C$</u>

$$Q_{B\to C} = \frac{3}{2}nR(T_C - T_A) < 0\,, \qquad L_{B\to C} = 0\,.$$

<u>ramo $C \to A$</u>

$$Q_{C\to A} = 0\,, \qquad L_{C\to A} = -\Delta U_{C\to A} = \frac{3}{2}nR(T_C - T_A) < 0\,.$$

Pertanto il rendimento vale

$$\eta = 1 + \frac{Q_{B\to C}}{Q_{A\to B}} = 1 - \frac{3}{2}\frac{nRT_A(1-0.63)}{nRT_A \ln 2} = 1 - \frac{3}{2}\frac{0.37}{\ln 2} \simeq 0.2\,.$$