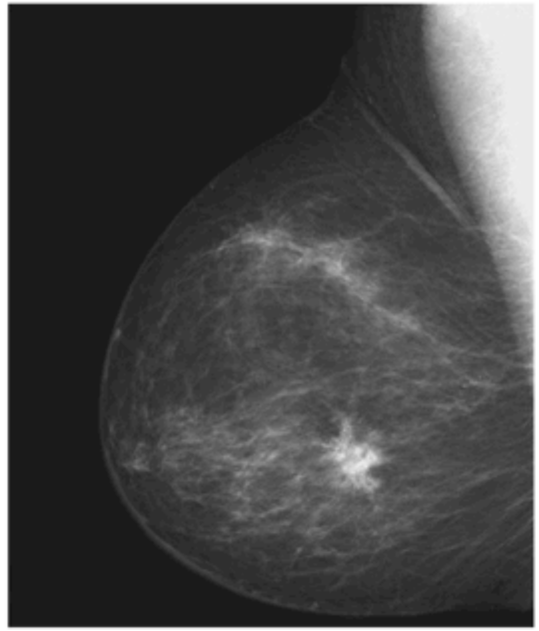
Analisi di Fourier



TRASFORMATA DI FOURIER (FT)
funzioni non periodiche

•Ogni funzione continua *f(x)* anche se non periodica (purché abbia area finita) può essere espressa come *integrale* di sinusoidi **complesse** opportunamente pesate. (*u*=frequenza)

antitrasformata di Fourier

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

Trasformata di Fourier

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

Dominio spaziale (o temporale) o dominio diretto

Dominio delle frequenze o dominio trasformato

TRASFORMATA DI FOURIER 1D
di una funzione continua

La trasformata di Fourier di una funzione continua e integrabile è una funzione complessa nel dominio delle frequenze (*u* = frequenza). In <u>coordinate polari</u> si ha :

$$\boxed{F(u) = \mathcal{F}\left[f(x)\right] = \Re(u) + j\Im(u) = \left|F(u)\right| e^{j\phi(u)}}$$

Spettro $$\left|F(u)\right| = \left[\Re(u)^2 + \Im(u)^2\right]^{1/2}$$

Fase $$\phi(u) = \tan^{-1}\left[\frac{\Im(u)}{\Re(u)}\right]$$

Potenza spettrale (densità spettrale) $$\left|F(u)\right|^2 = \Re(u)^2 + \Im(u)^2$$

TRASFORMATA DI FOURIER 2D
di una funzione continua

Trasformata
$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

Antitrasformata
$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

Spettro
$$|F(u,v)|=\left[\Re(u,v)^2+\Im(u,v)^2\right]^{1/2}$$

Fase
$$\phi(u,v)=\tan^{-1}\left[\frac{\Im(u,v)}{\Re(u,v)}\right]$$

Potenza spettrale
(densità spettrale)
$$|F(u,v)|^2=\Re(u,v)^2+\Im(u,v)^2$$

TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA 2D DFT

$$f(x,y) = f(x_0 + x\Delta x, y_0 + y\Delta y) \qquad x=0,\dots,M-1;\ y=0,\dots,N-1$$

$$F(u,v) = F(u_0 + u\Delta u, v_0 + v\Delta v) \qquad u=0,\dots,M-1;\ v=0,\dots,N-1$$

$$F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

DFT

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

DFT^{-1}

f* (*x,y*) campionata: *Δx* , *Δy

***F* (*u,v*) campionata: *Δu=1/MΔx* , *Δv=1/NΔy*.**

f(x,y)=f(x+M,y+N)

F (u,v)=F (u+M,v+N)

PERIODICITA'

TRASFORMATA DI FOURIER
(funzione complessa)

$$\boxed{F(u,v) = \Re(u,v) + j\Im(u,v) = \left|F(u,v)\right| e^{j\phi(u,v)}}$$

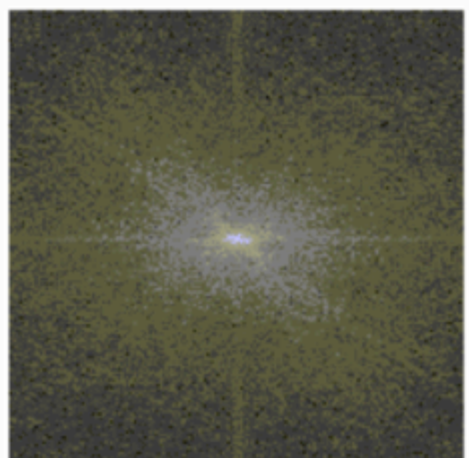
Spettro

$$\left|F(u,v)\right| = \left[\Re(u,v)^2 + \Im(u,v)^2\right]^{1/2}$$

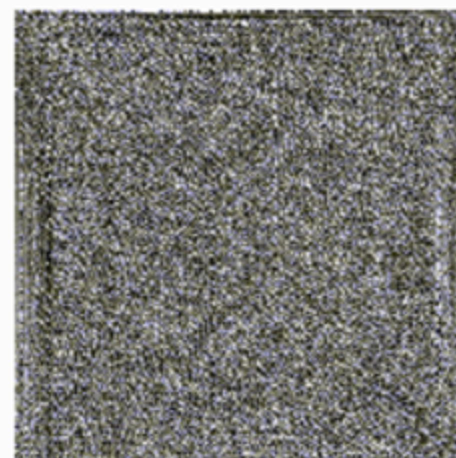
Fase

$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{\Im(u,v)}{\Re(u,v)}\right]$$

$f(x,y)$



$|F(u,v)|$

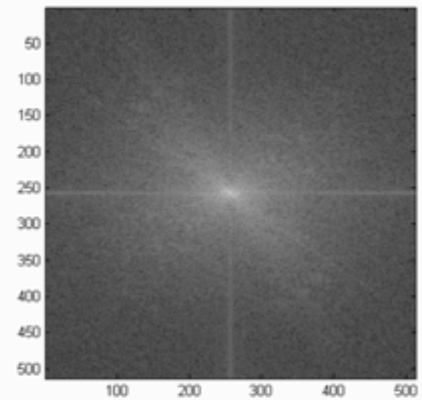


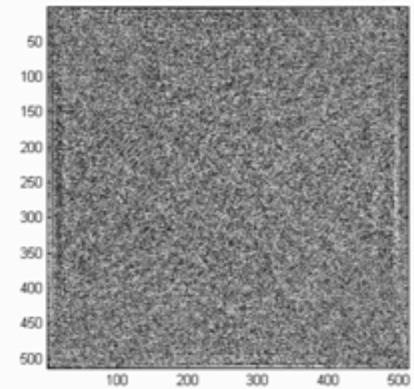
$\Phi\,(u,v)$

ANALISI-SINTESI

$$|F(u,v)| \qquad \phi(u,v)$$

DFT



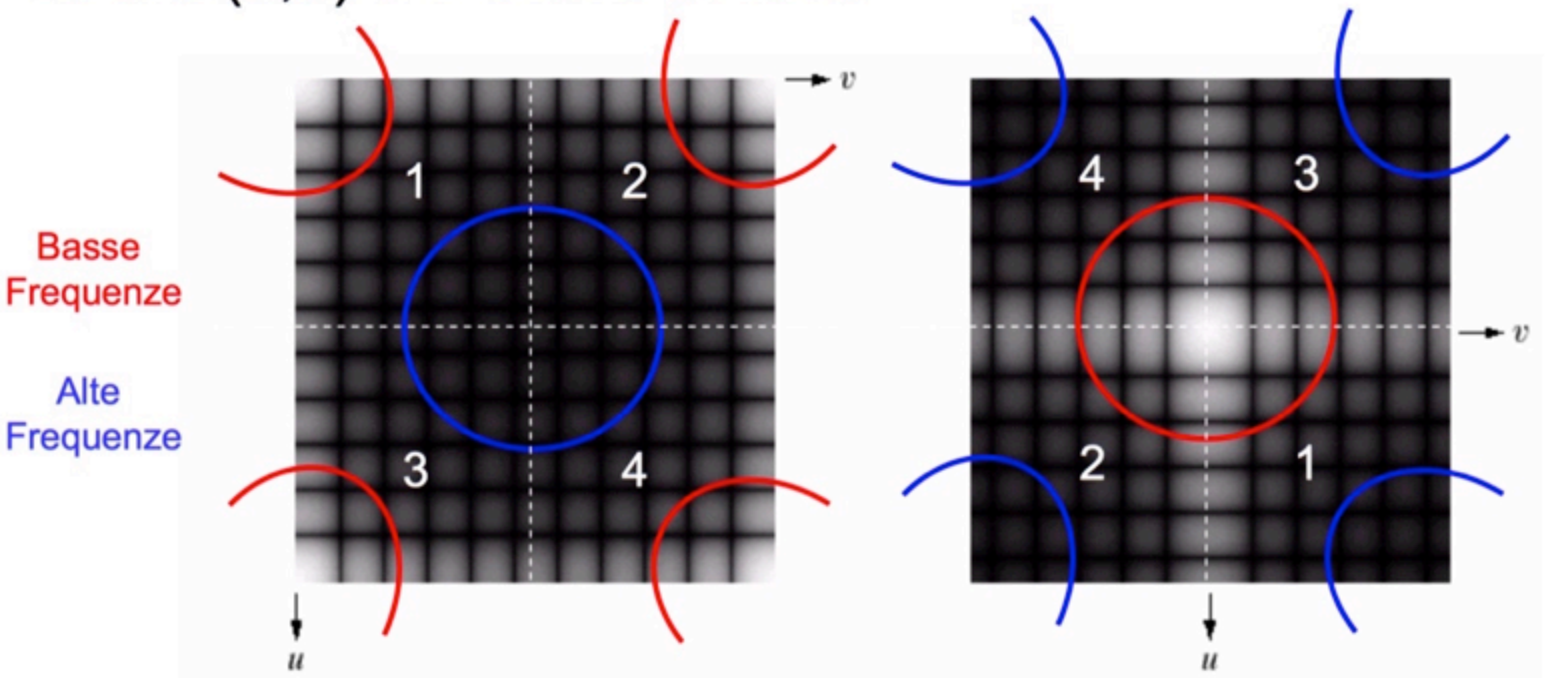


$$\boxed{F(u,v) = |F(u,v)|e^{j\phi(u,v)}}$$

DFT⁻¹

Trasformata di Fourier: Immagini

- La trasformata di una immagine è periodica e simmetrica: il valore (0,0) è in alto a sinistra

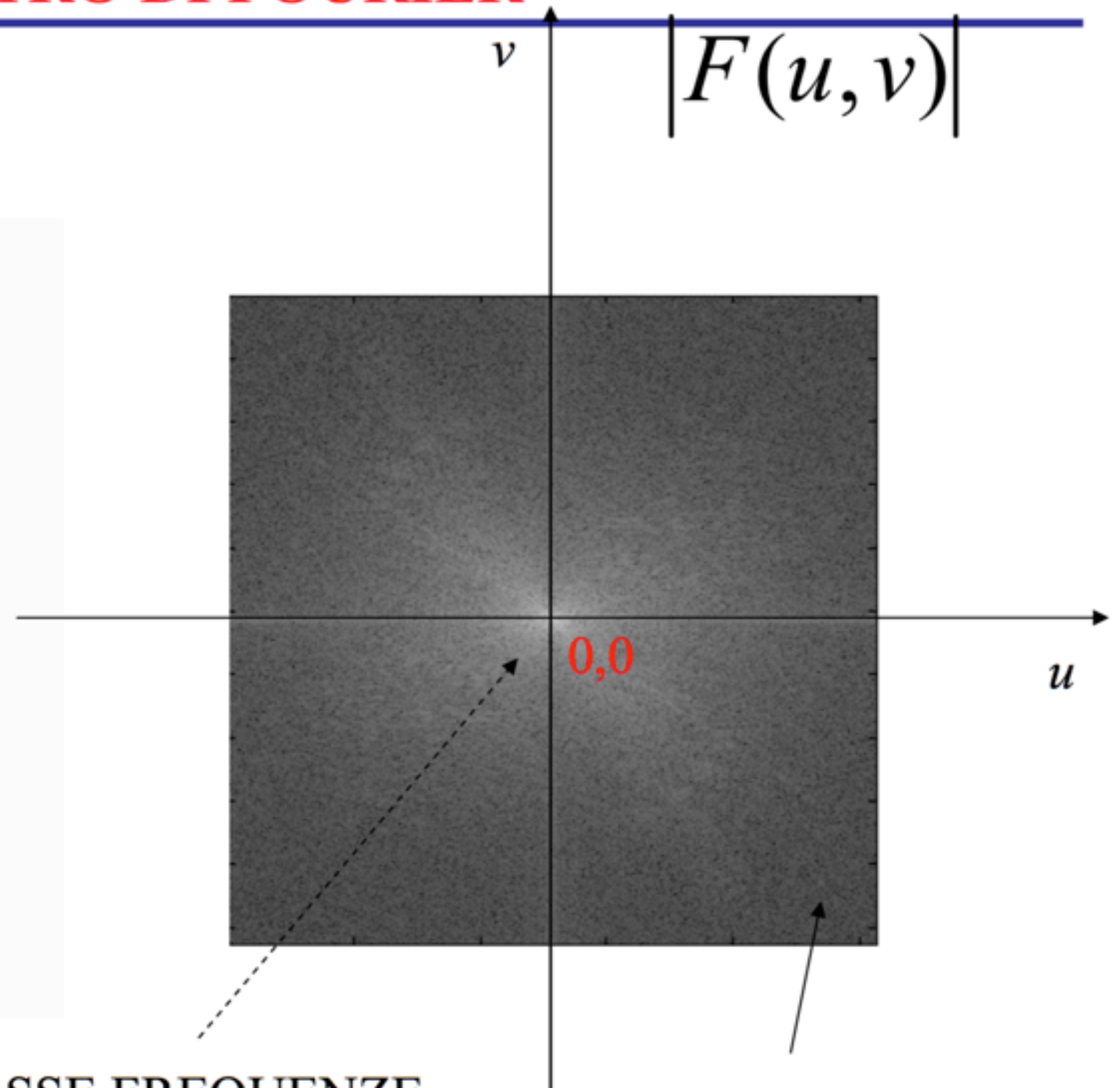


- Per leggibilità (e utilità) si preferisce traslare lo spettro per avere (0,0) al centro

RAPPRESENTAZIONE SPETTRO DI FOURIER

$|F(u,v)|$

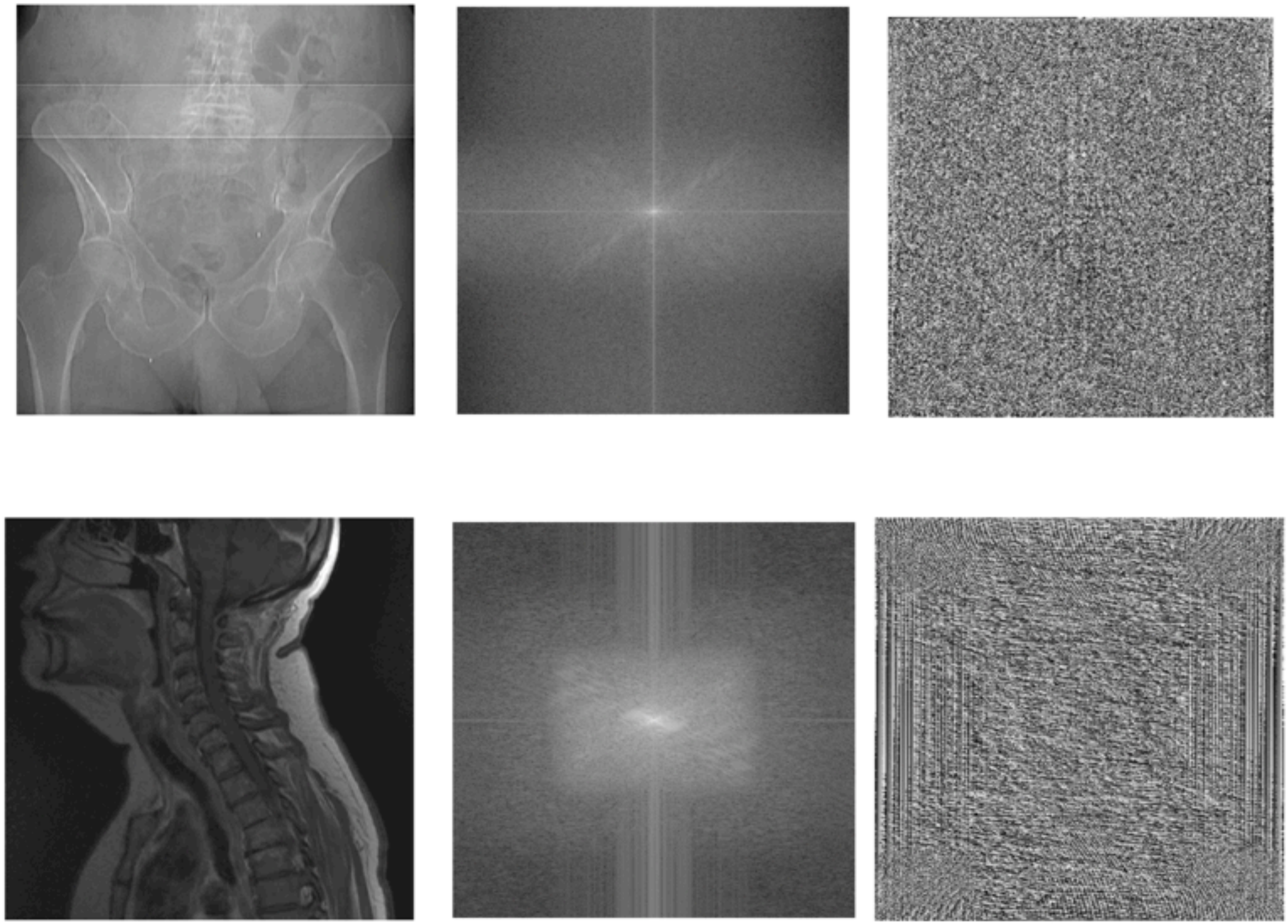
$f(x,y)$



BASSE FREQUENZE

ALTE FREQUENZE

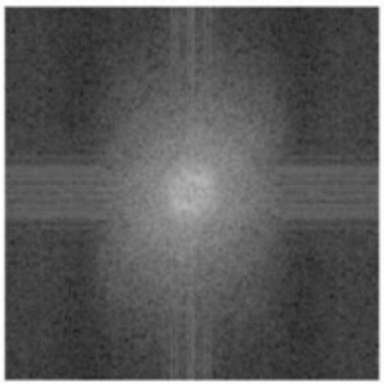
DISCRETE FOURIER TRANSFORM DFT



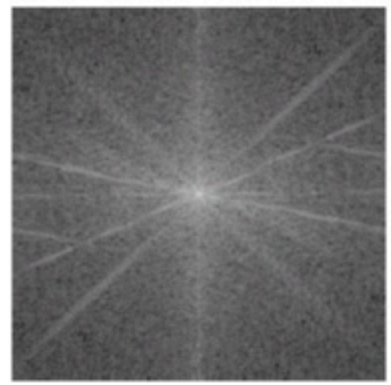
MODULO E FASE

$f(x,y)$

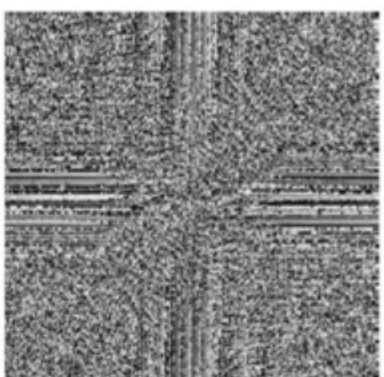
$g(x,y)$



$|F(u,v)|$



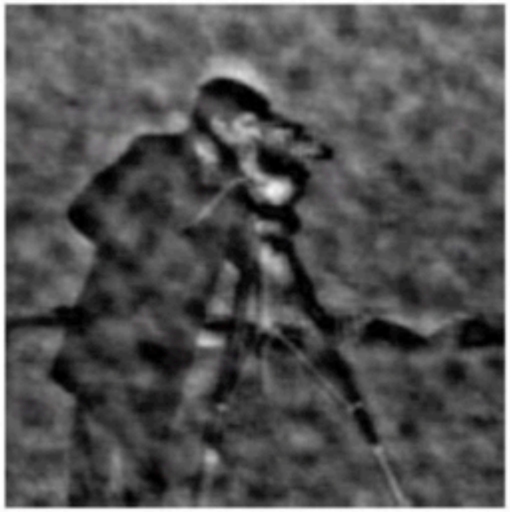
$|G(u,v)|$



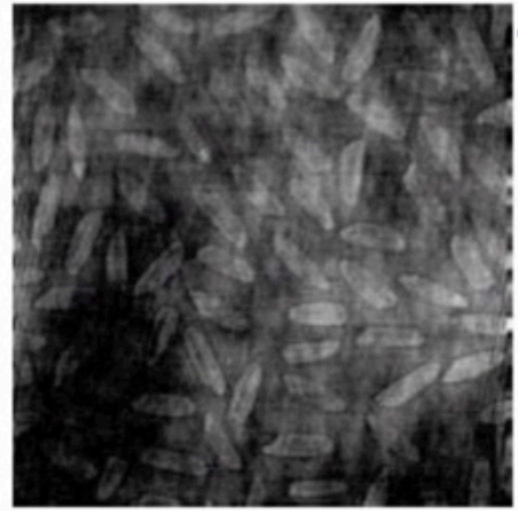
$\angle F(u,v)$

$\angle G(u,v)$

MODULO E FASE



$$F^{-1}\left[\left|F(u,v)\right|e^{(j\angle G(u,v))}\right]$$



$$F^{-1}\left[\left|G(u,v)\right|e^{(j\angle F(u,v))}\right]$$

- La fase contiene le informazione essenziali sulla struttura dell'immagine e le informazioni sulla posizione.

- L'ampiezza contiene solo l'informazione relativa alla presenza o meno delle strutture nell'immagine.

PROPRIETÀ DELLA DFT

Separabilità

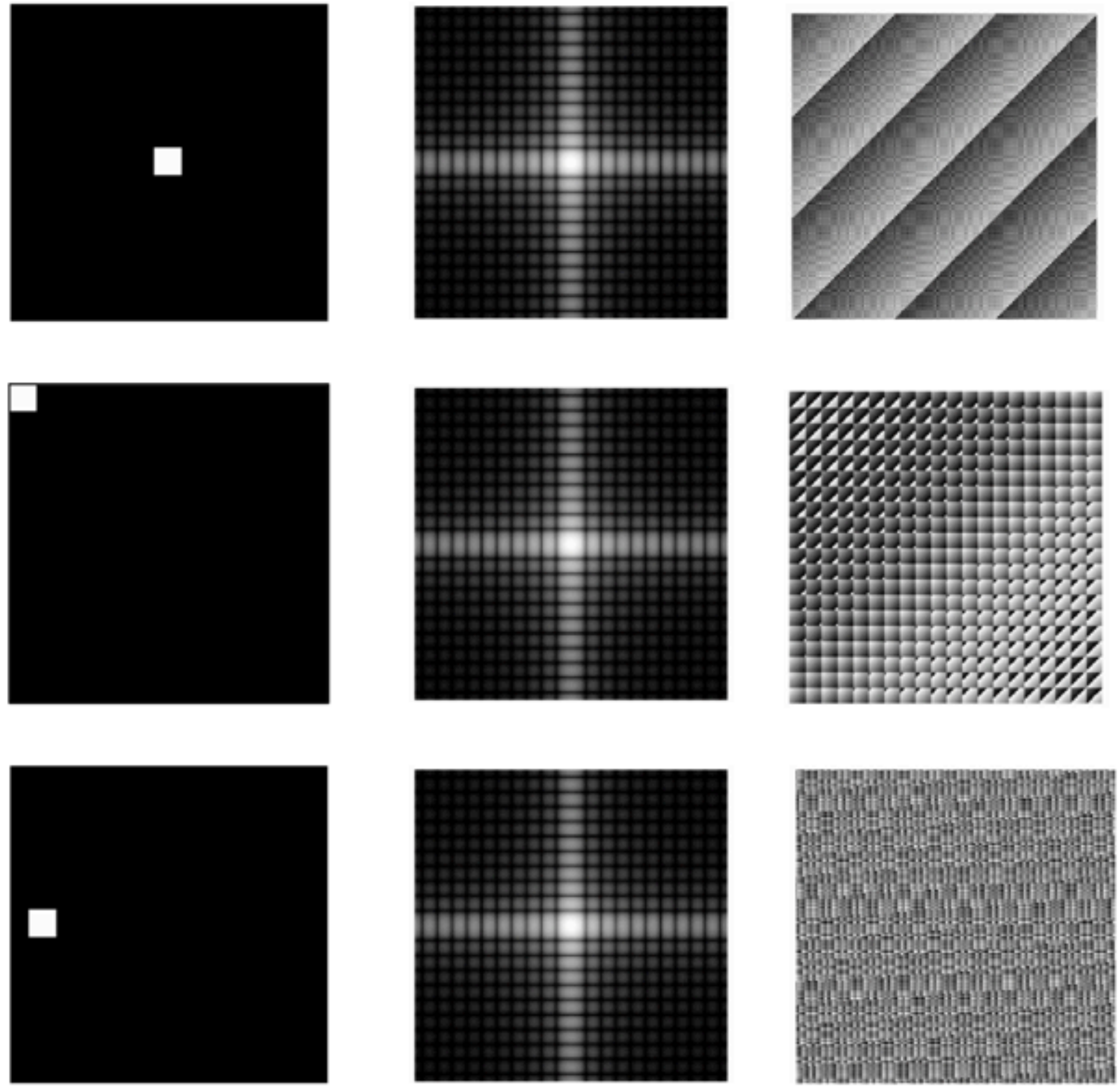
$$f(x,y) \xrightarrow[\text{sulle righe}]{\text{DFT 1D}} F(x,v) \xrightarrow[\text{sulle colonne}]{\text{DFT 1D}} F(u,v)$$

$$F(u,v) = \frac{1}{NM} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M}\right)}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \left(\underbrace{\frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} f(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{vy}{M}\right)}}_{\mathbf{F(x,v)}} \right) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N}\right)}$$

PROPRIETÀ DELLA DFT

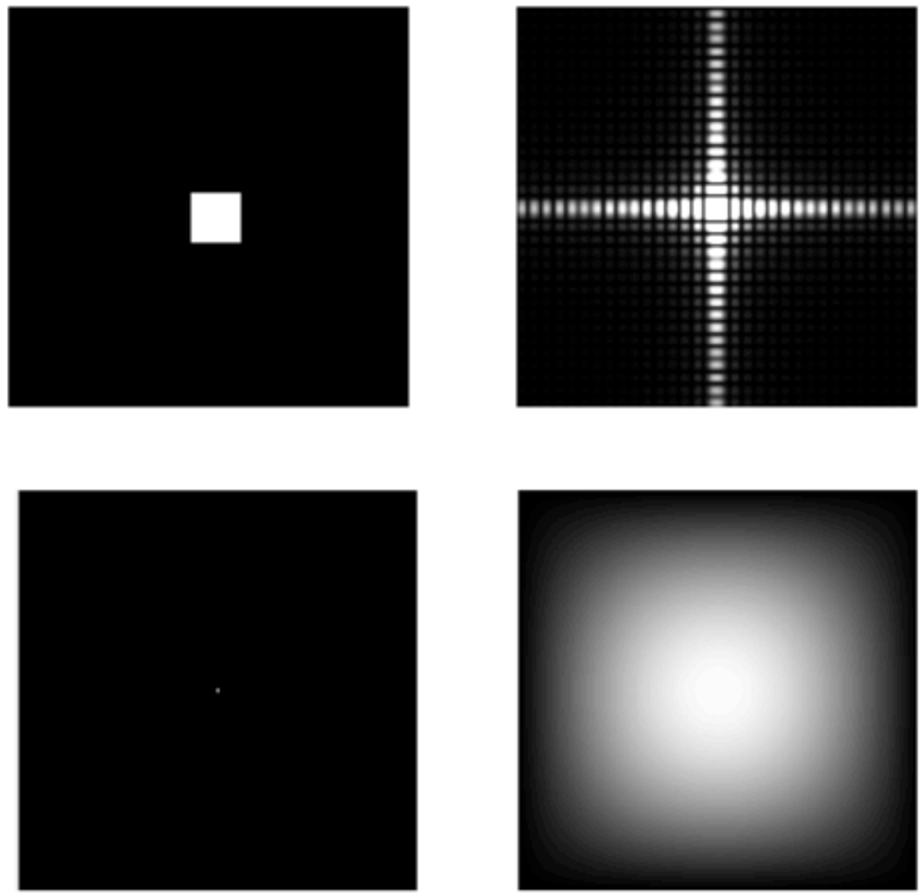
- Spettro invariante per traslazione



PROPRIETÀ DELLA DFT

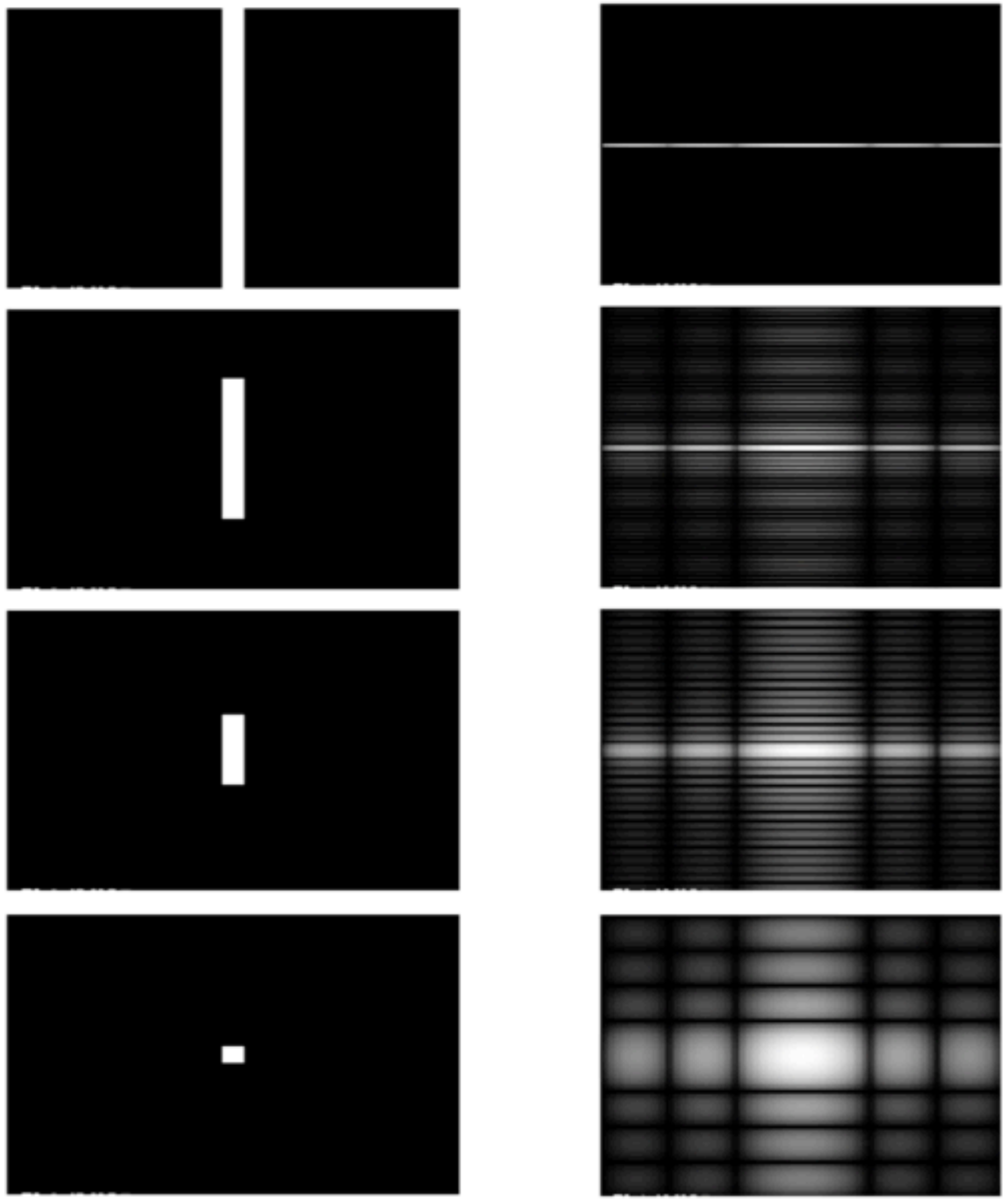
Scaling

$$f(\alpha x, \beta y) \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha\beta|} F\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v}{\beta}\right)$$



PROPRIETÀ DELLA DFT

- Scaling



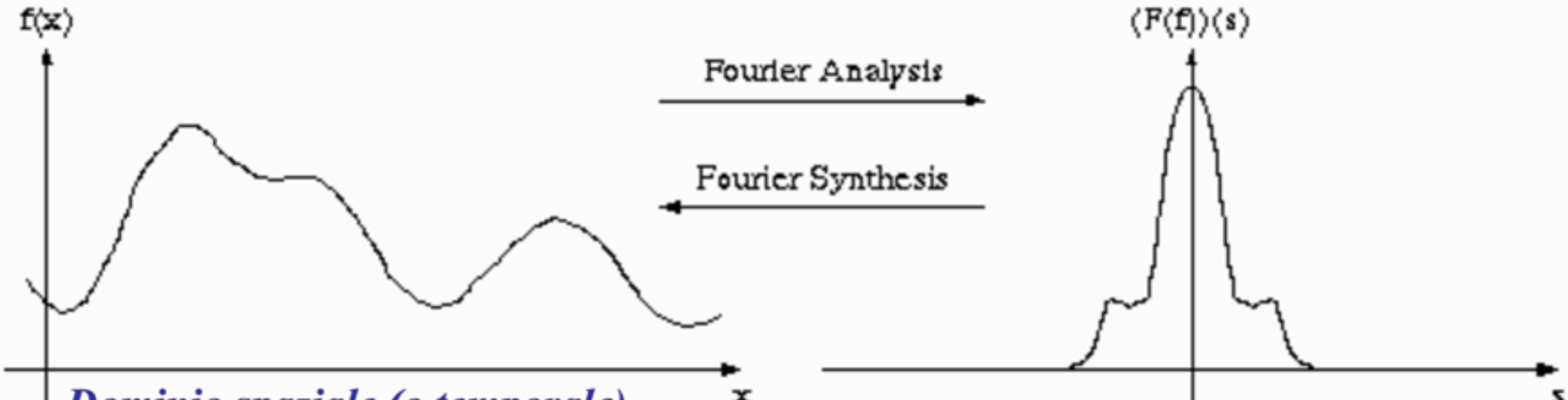
PROPRIETÀ DELLA DFT

Trasformazione reversibile: ANALISI-SINTESI

$$F^{-1}F[f(x,y)] = f(x,y)$$

Antitrasformata (SINTESI) $\iff$ *Trasformata (ANALISI)*

$f(x) = F^{-1}[F(u)]$ $\qquad$ $F(u)=F[f(x)]$



Dominio spaziale (o temporale) o dominio diretto

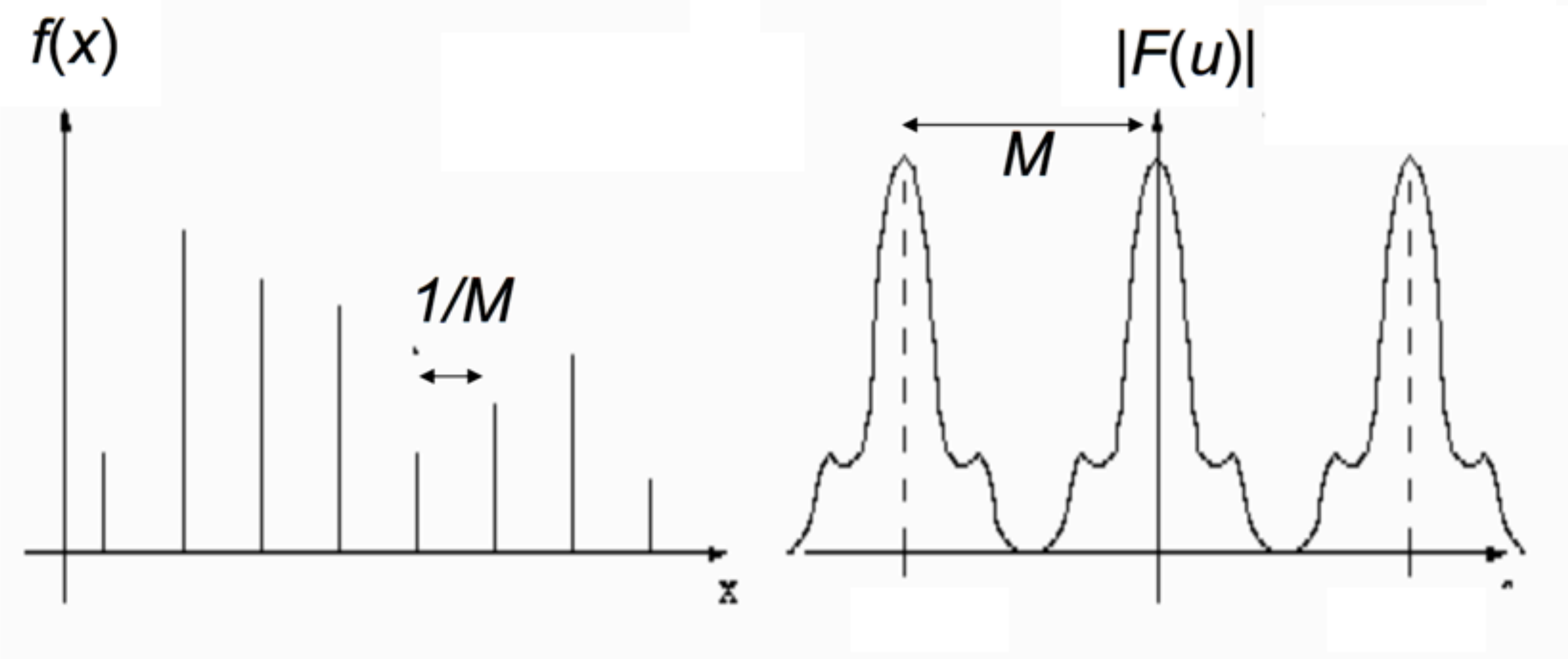
Dominio delle frequenze o dominio trasormato

PROPRIETÀ DELLA DFT

Periodicità della DFT: f(x) campionata (vale anche per DTFT)

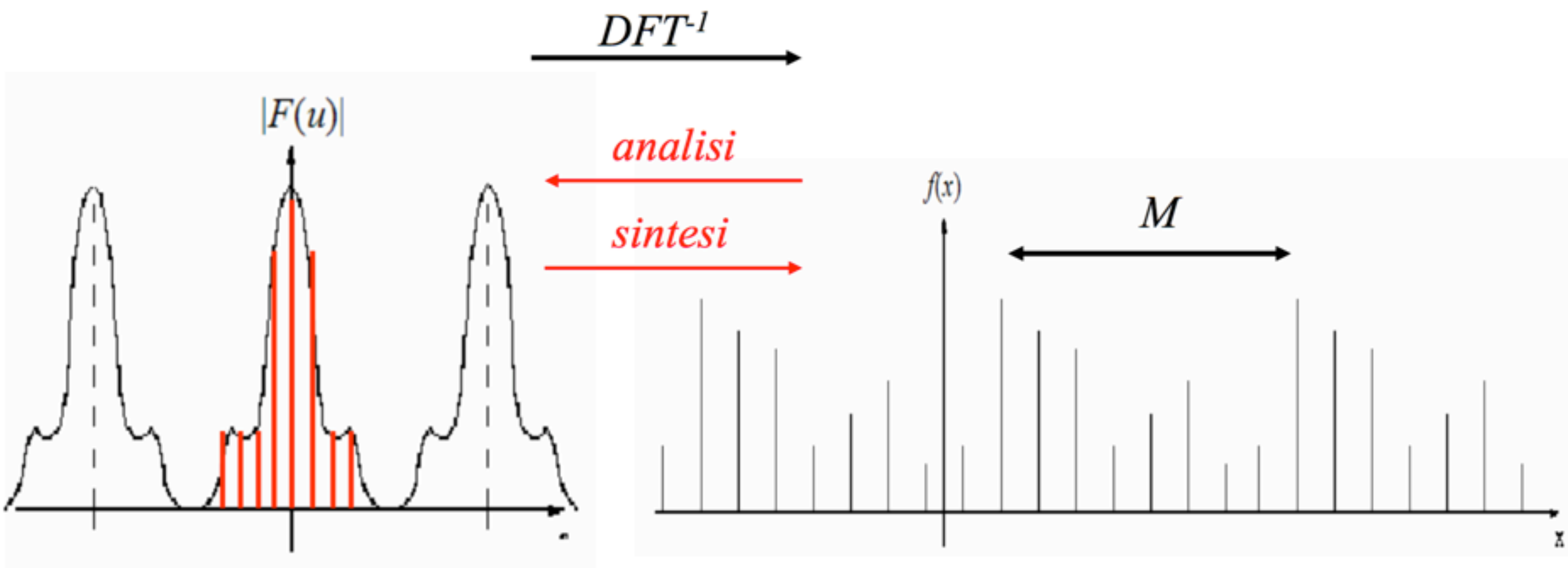
$F(u) = F(u+M)$

$$F(u)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j\frac{2\pi}{M}ux} \quad u=0,\ldots,M-1$$



PROPRIETÀ DELLA DFT

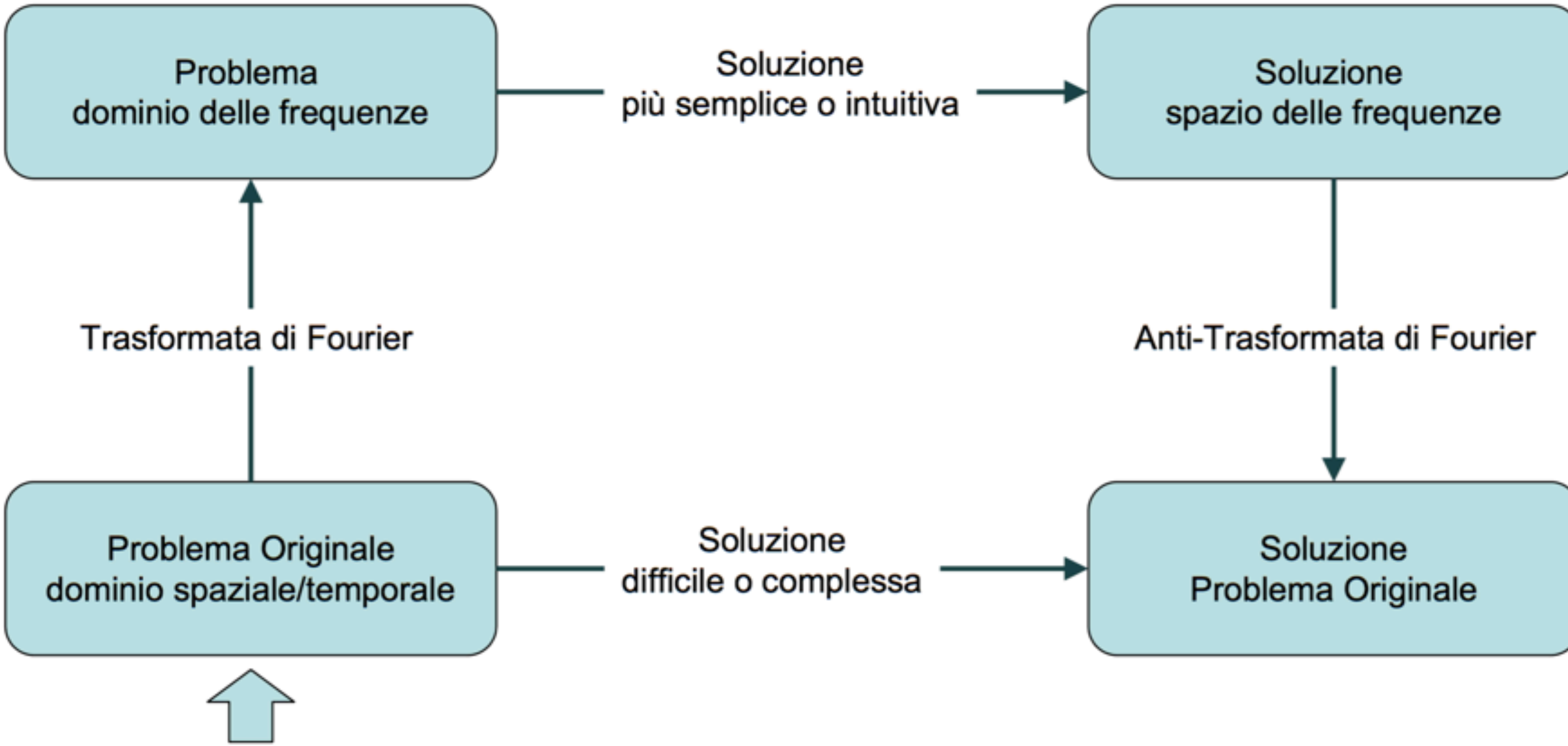
Periodicità di antitrasformata



$$f(x)=\sum_{u=0}^{M-1}F(u)e^{j\frac{2\pi}{M}ux}\qquad x=0,\dots,M-1$$

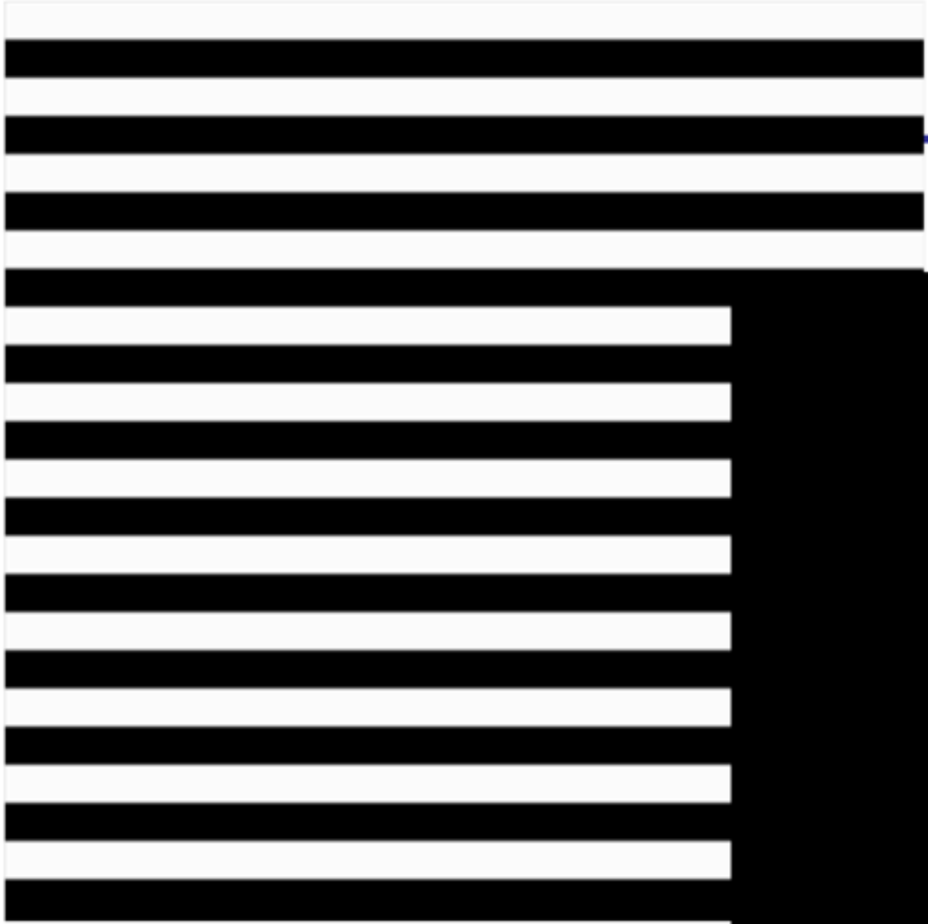
Trasformata di Fourier

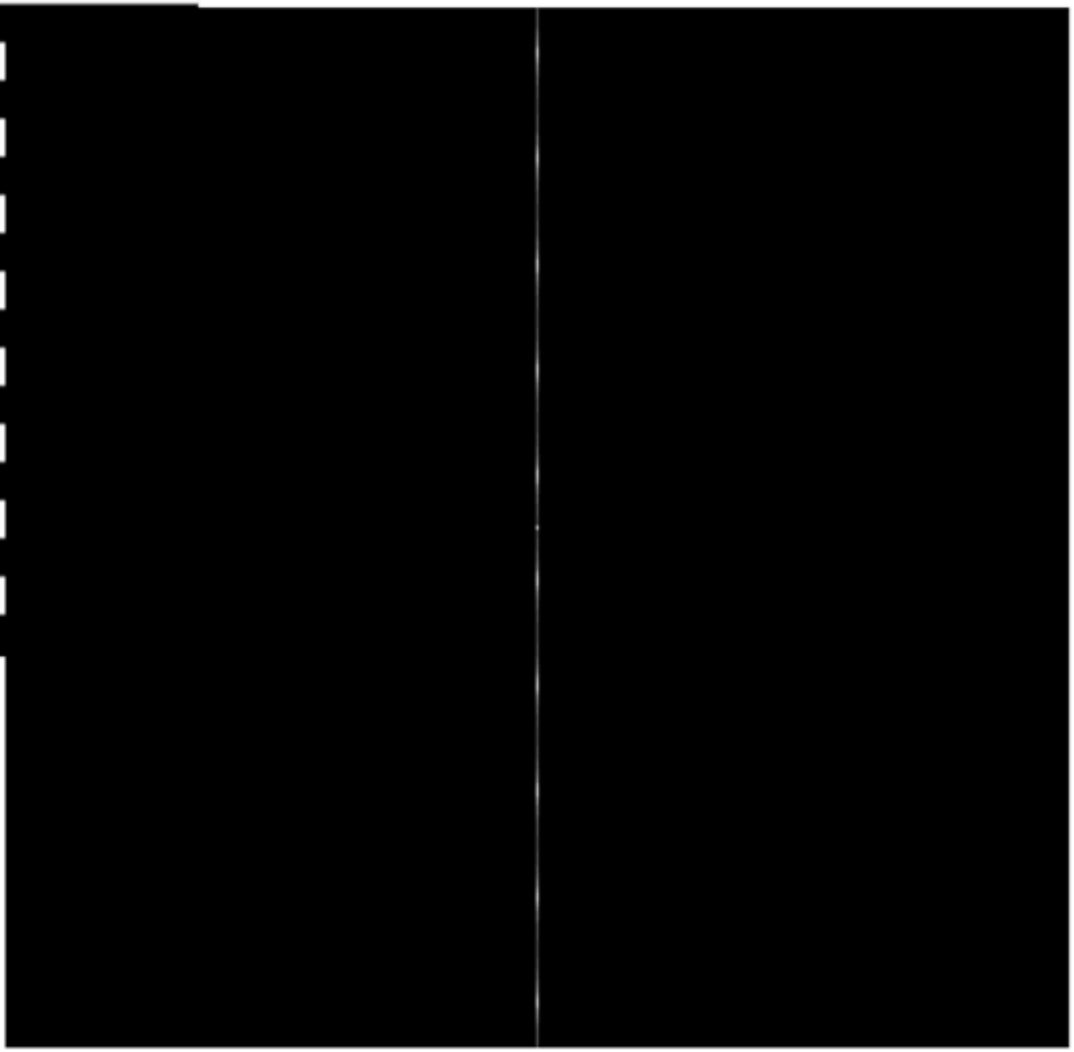
- Dominio Spaziale/Temporale vs. Frequenze

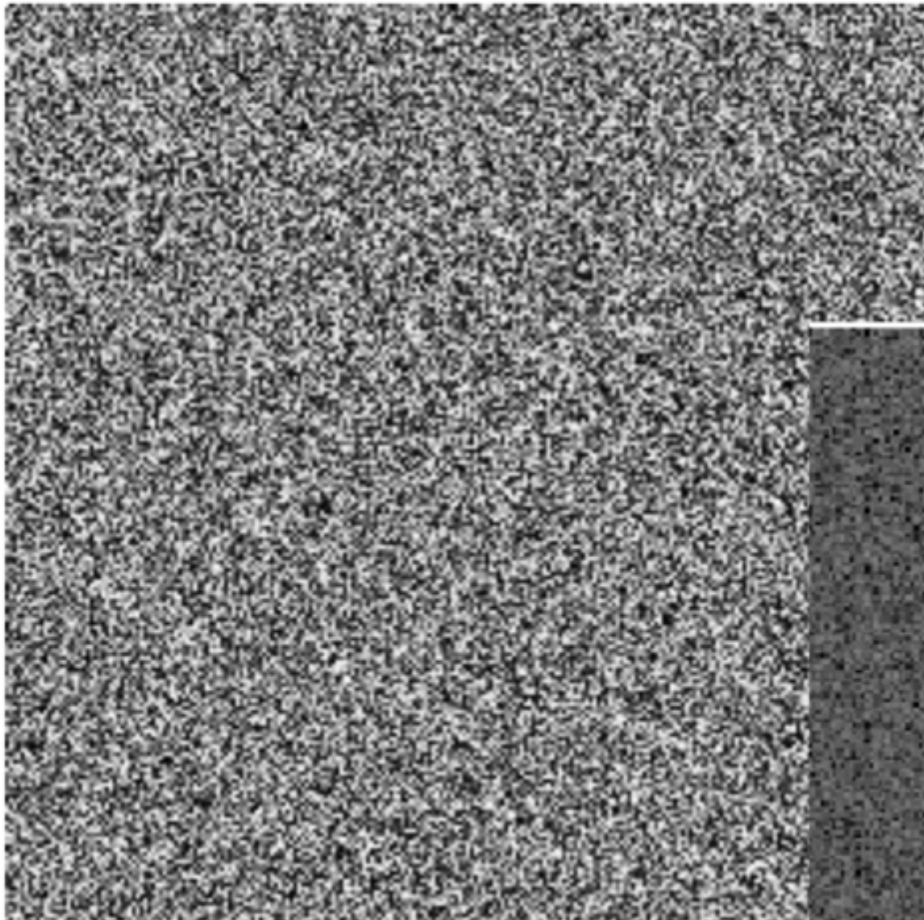


ESEMPIO DI DFT 2D

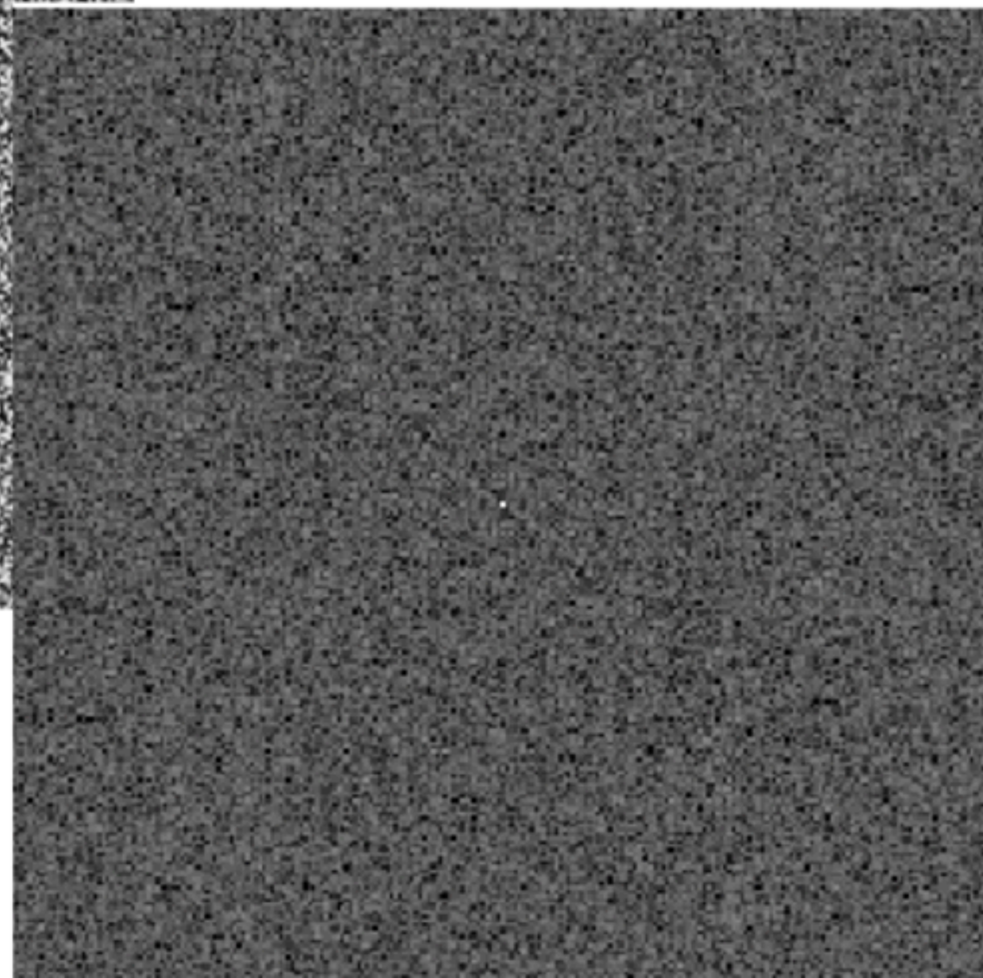
senza rumore (noise)



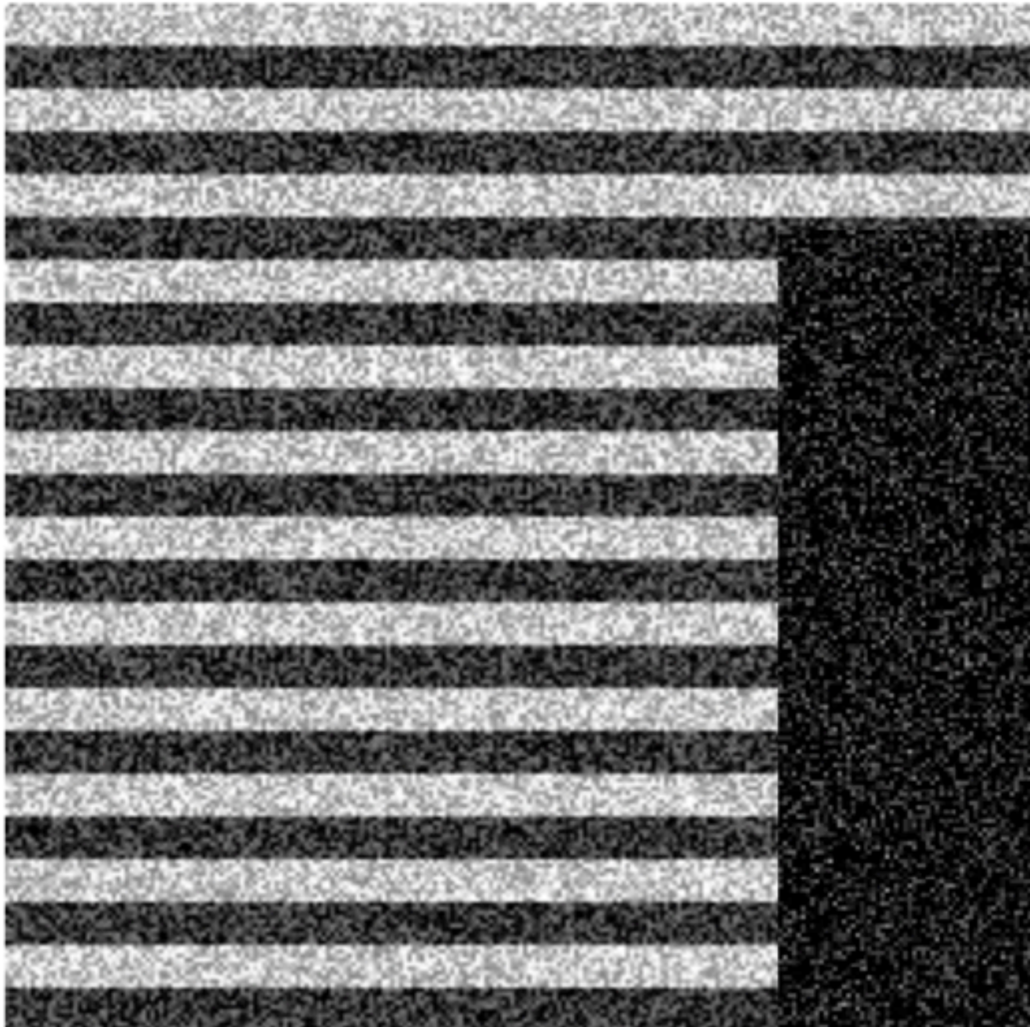


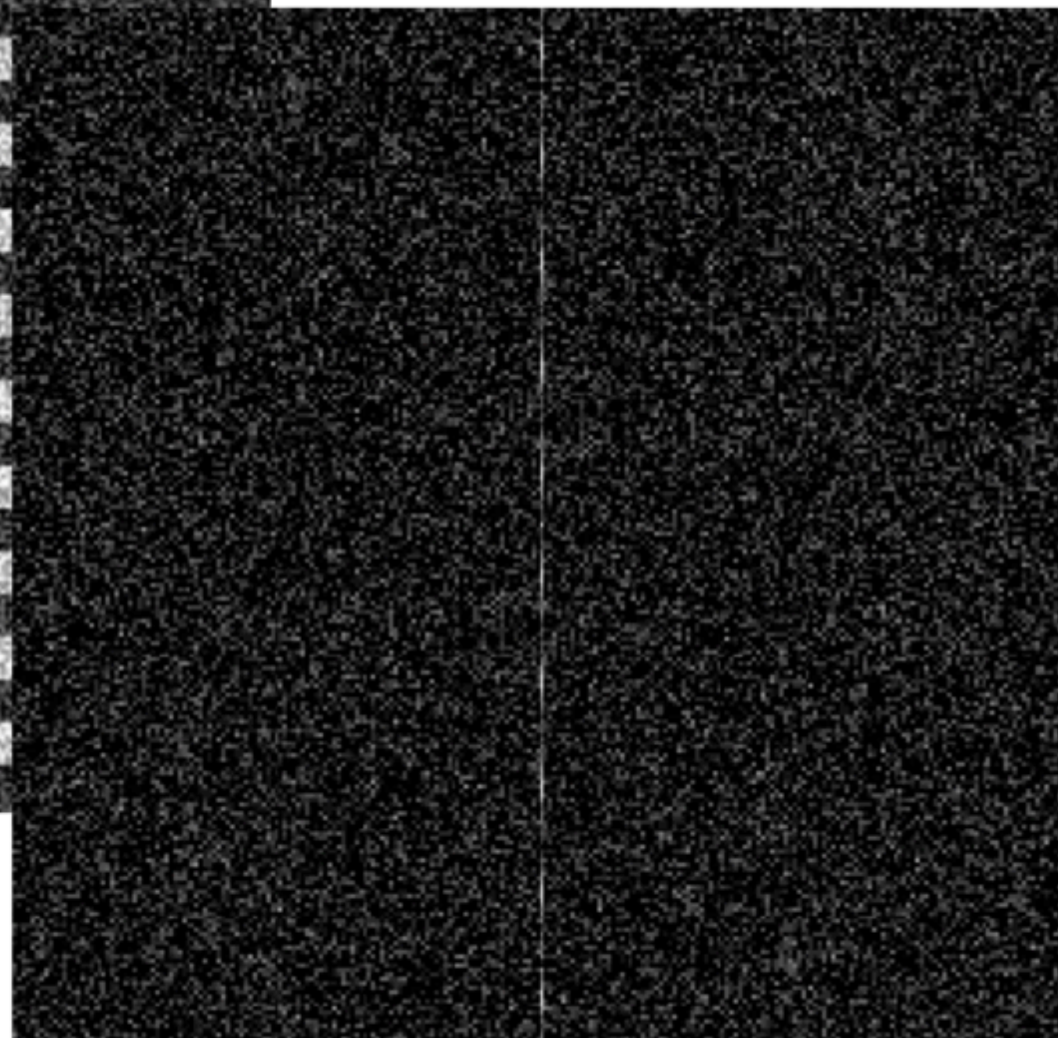


ESEMPIO DI DFT 2D
rumore (noise)

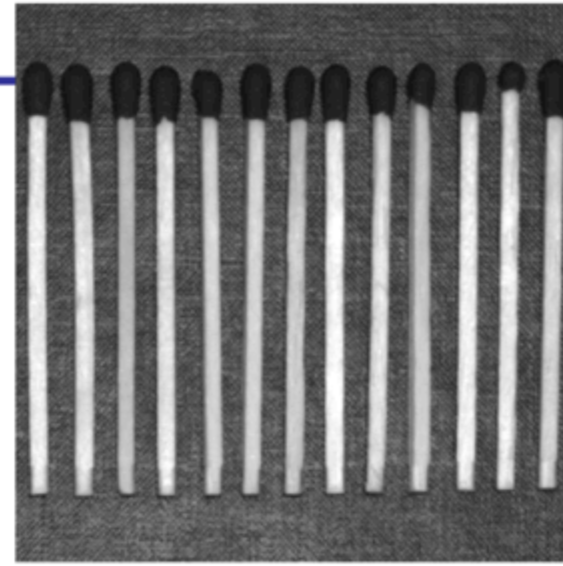


ESEMPIO DI DFT 2D
con rumore (noise)

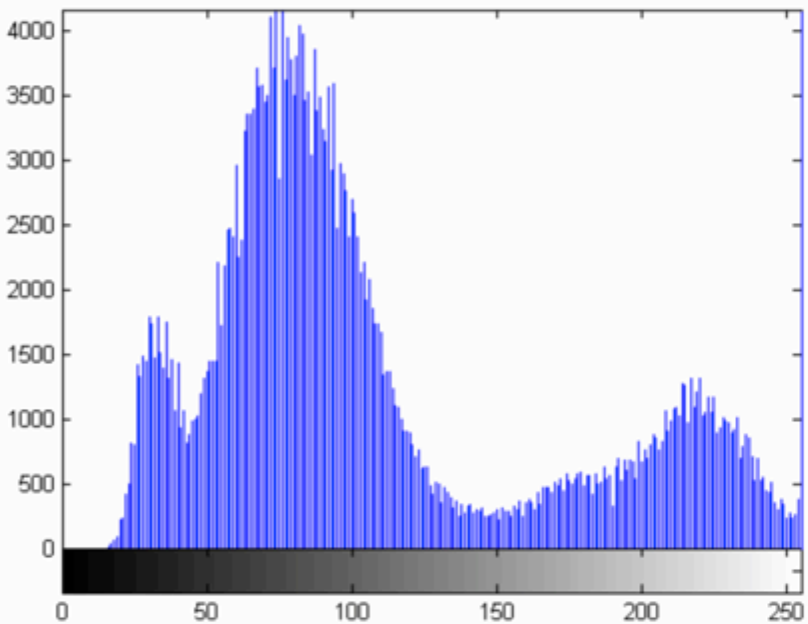


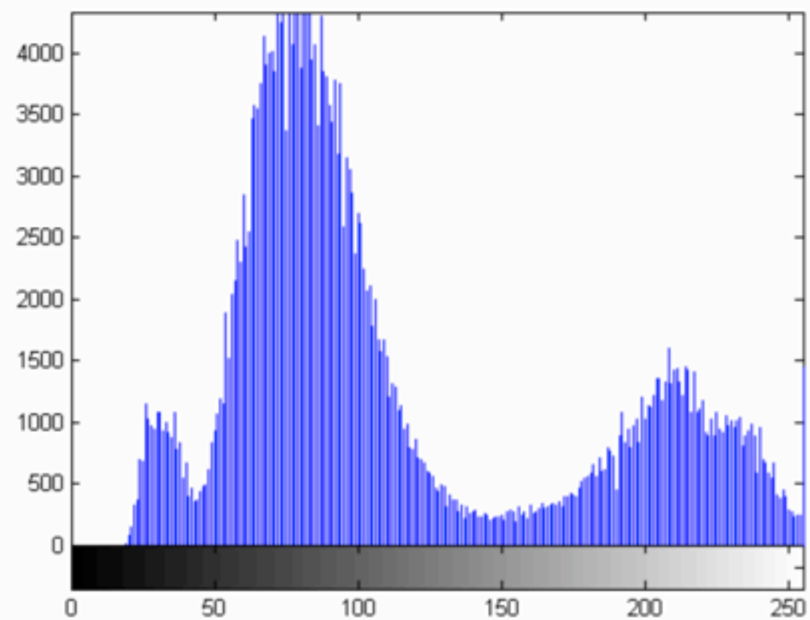


TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA 2D

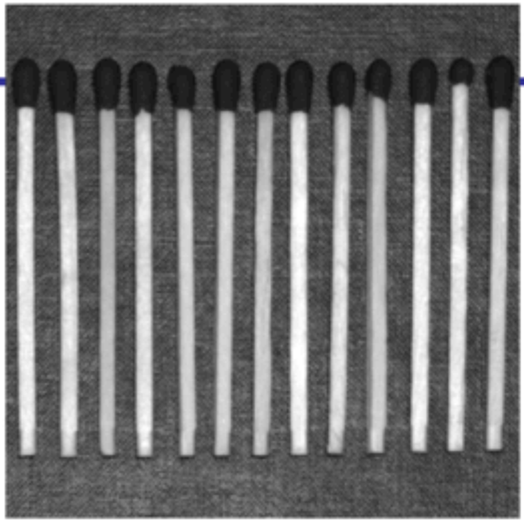


ANALISI ISTOGRAMMA

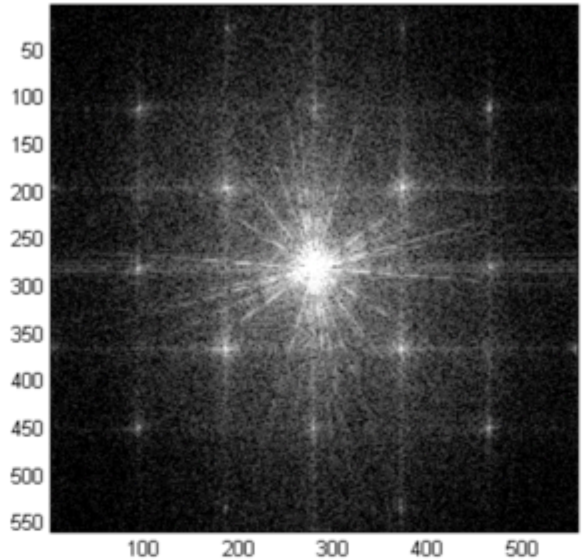


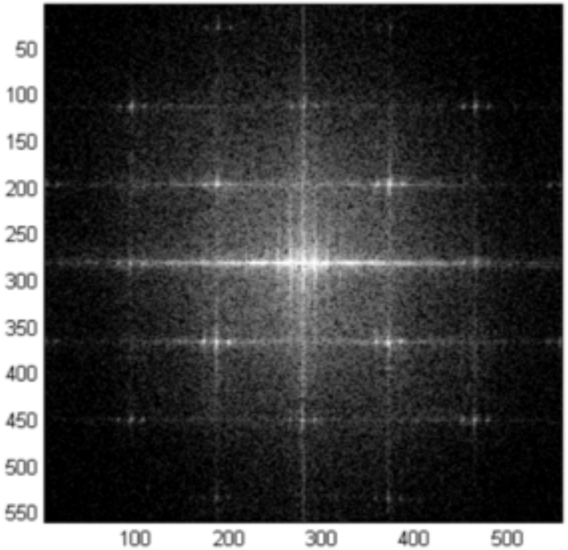


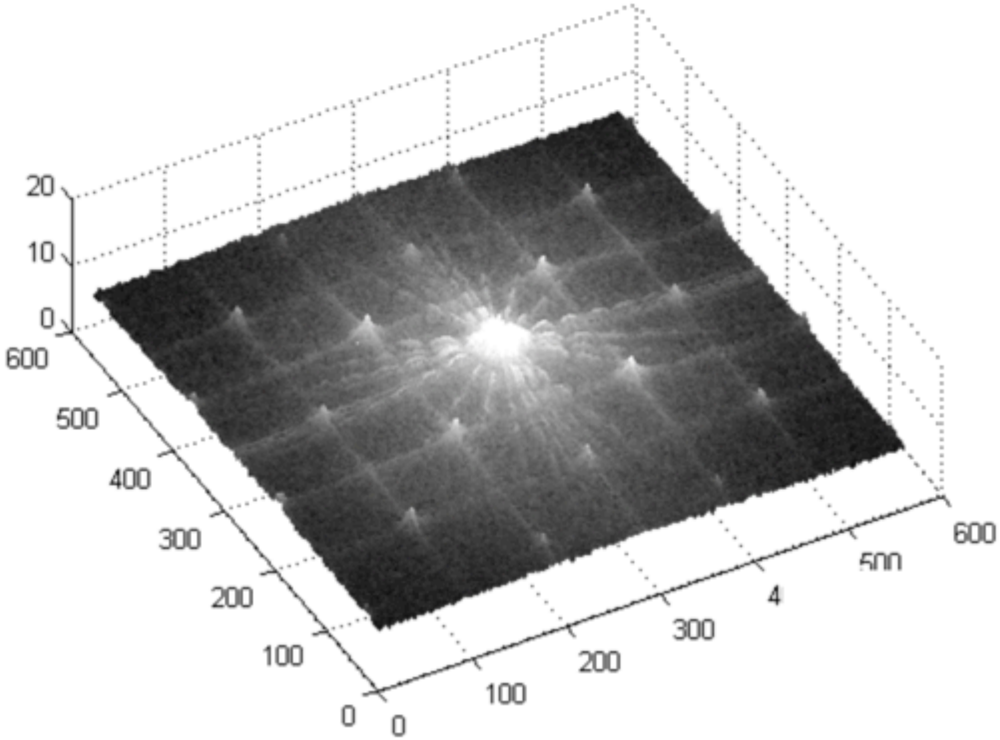
TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA 2D

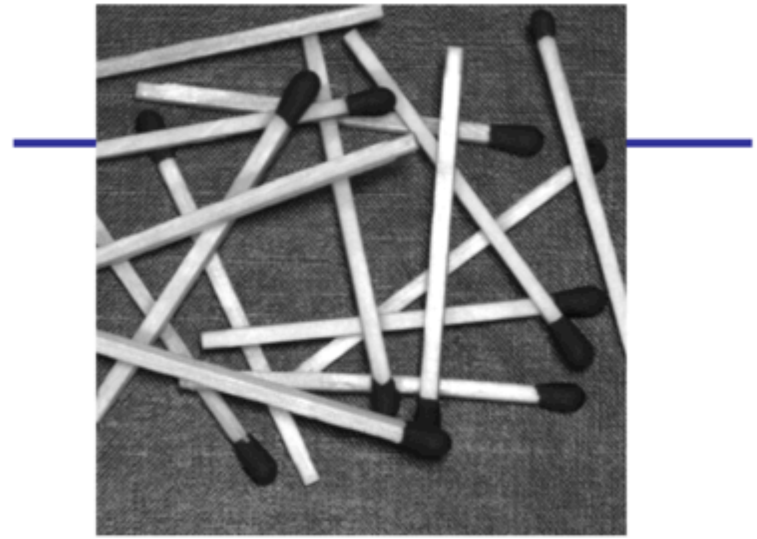


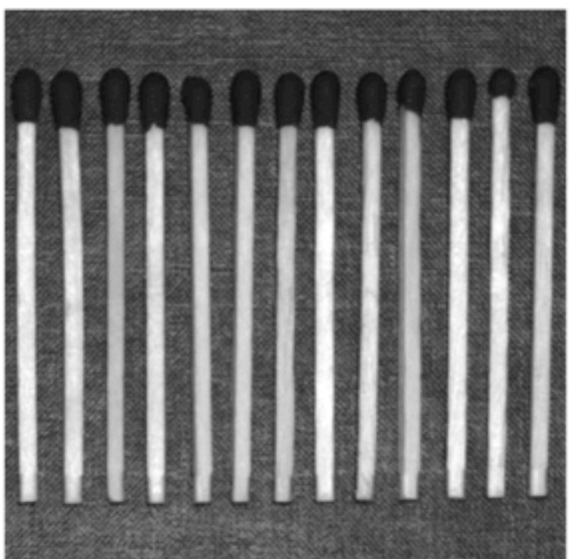
MODULO DELLA TRASFORMATA

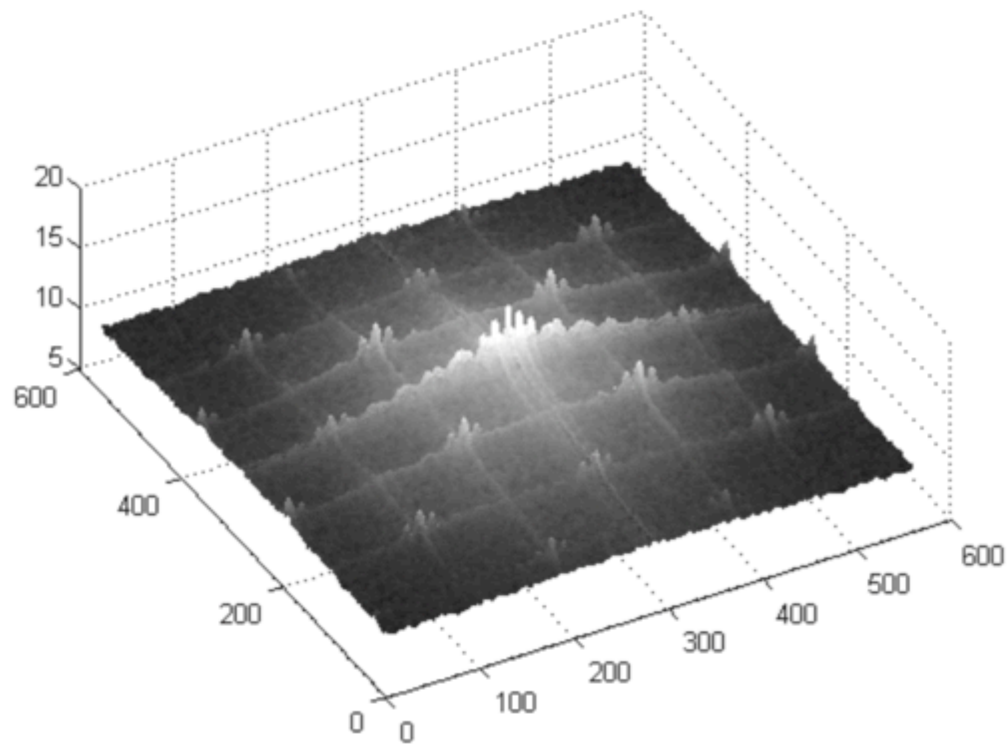




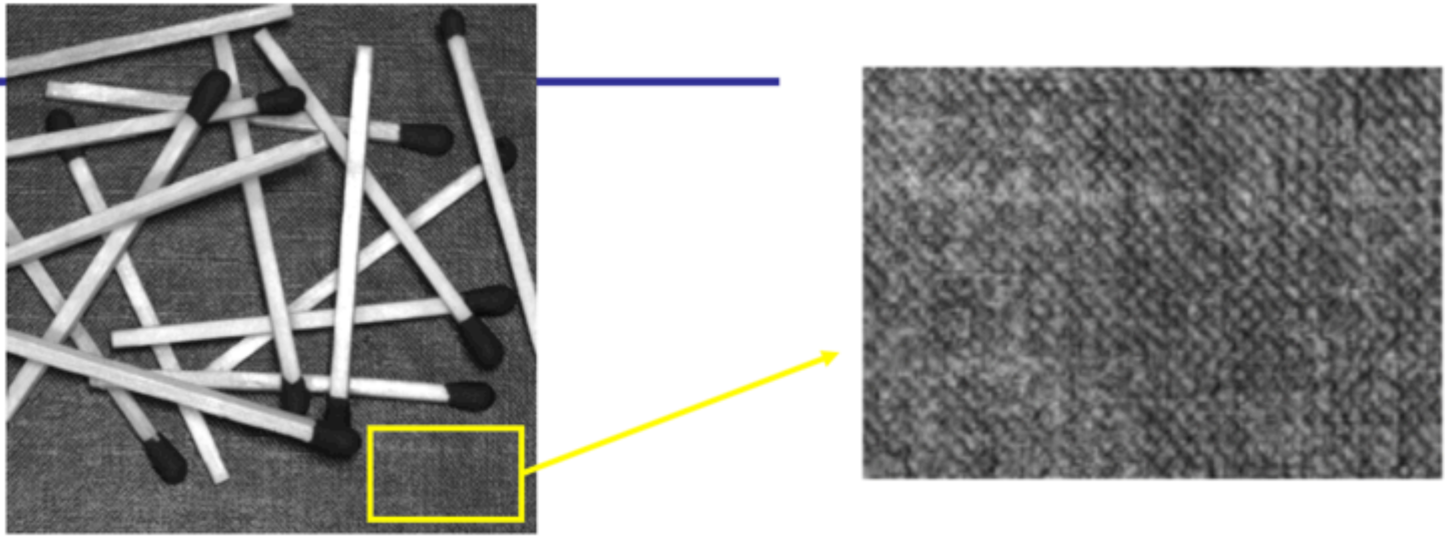

20
10
0
600
500
400
300
200
100
0
0
100
200
300
4
600



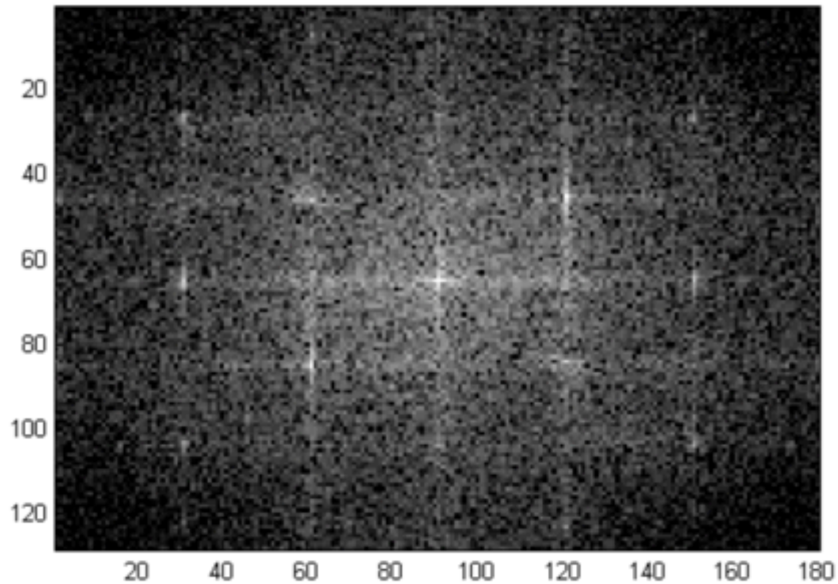



20
15
10
5
600
400
200
0
0
100
200
300
400
500
600

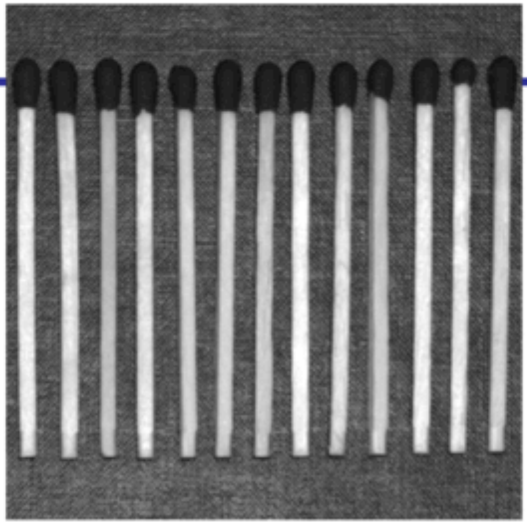
TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA 2D



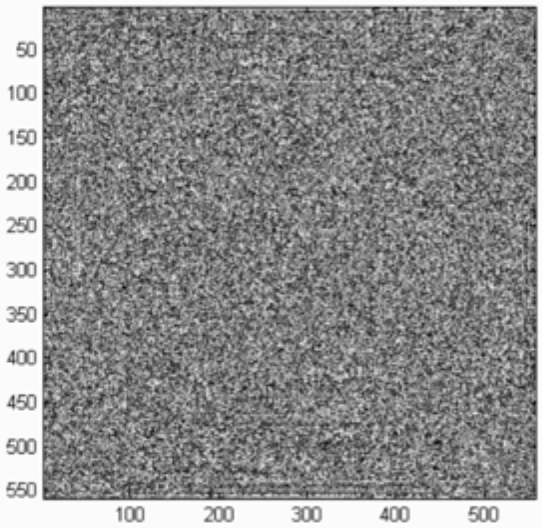
MODULO DELLA TRASFORMATA

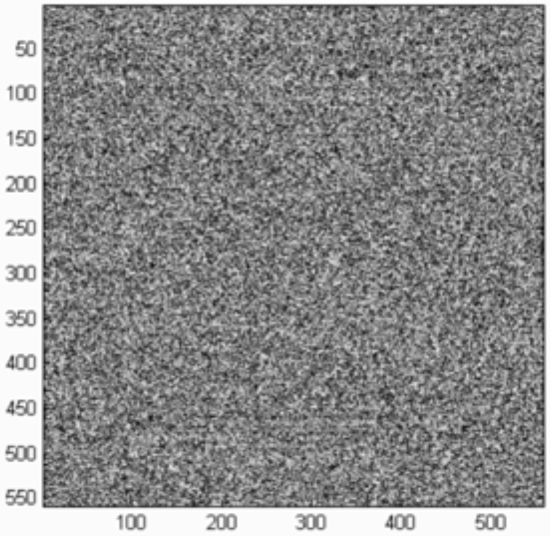


TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA 2D



FASE DELLA TRASFORMATA

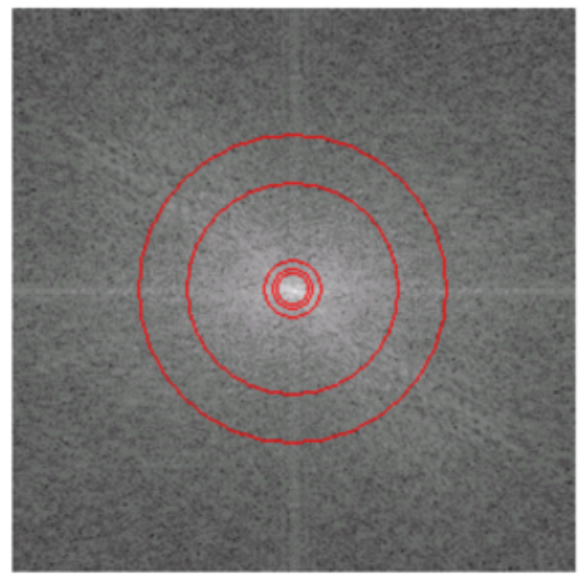




Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

$$P(u) = |F(u)|^2 = \Re(u)^2 + \Im(u)^2$$ Potenza spettrale

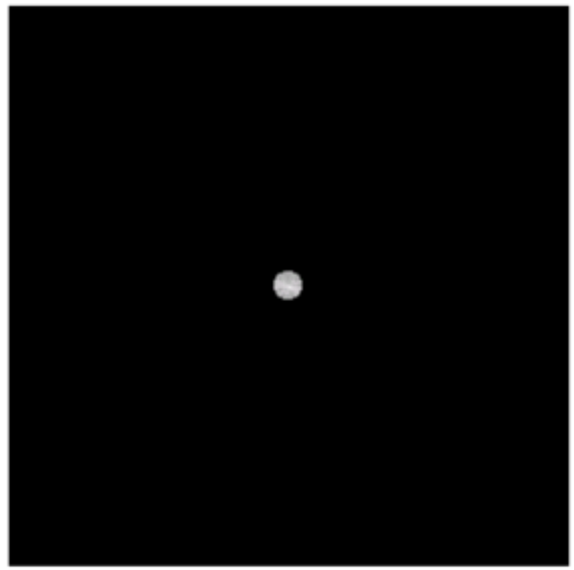


- Le circonferenze (dal centro) racchiudono il 90, 93, 95, 99, 99.5% della potenza spettrale totale

Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

Originale



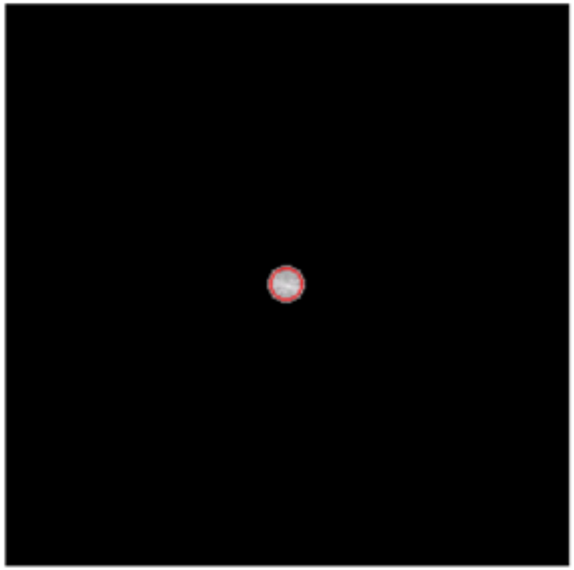
Spettro (90%)

Ricostruita

Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

Originale

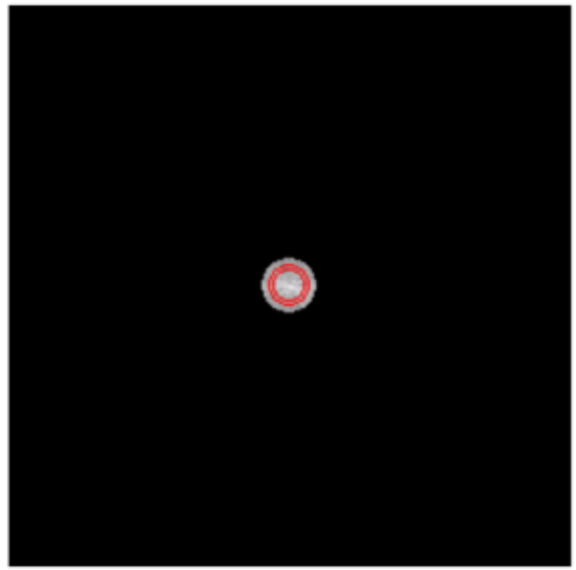


Spettro (93%)

Ricostruita

Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro



Originale

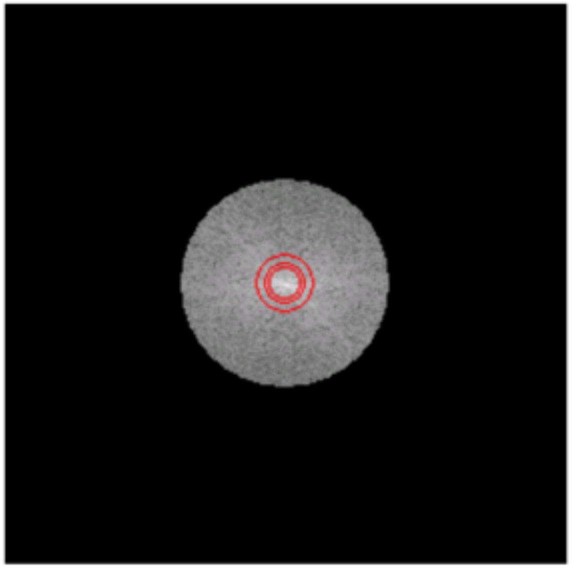
Spettro (95%)

Ricostruita

Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

Originale



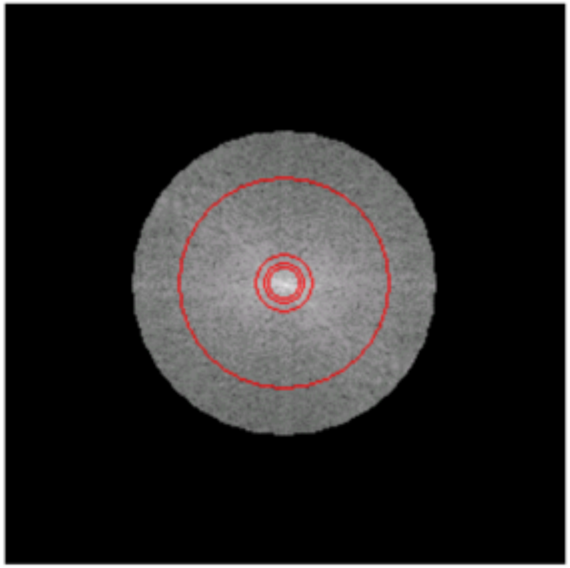
Spettro (99%)

Ricostruita

Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

Originale



Spettro (99.5%)

Ricostruita

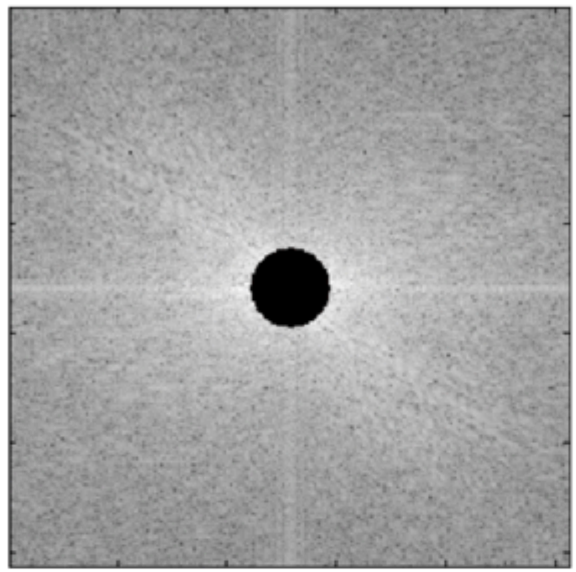
Trasformata di Fourier: Immagini

- Ringing

Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

Originale



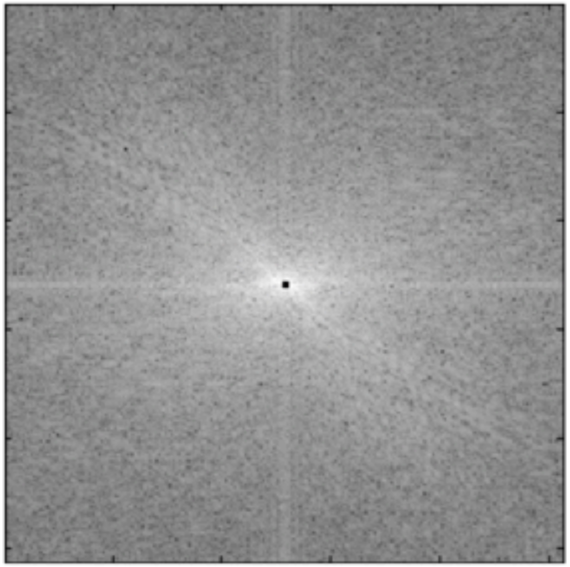
Spettro

Ricostruita

Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

Originale



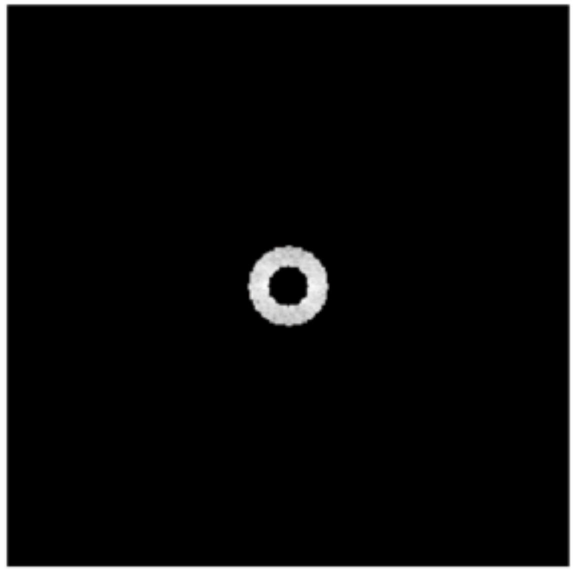
Spettro

Ricostruita

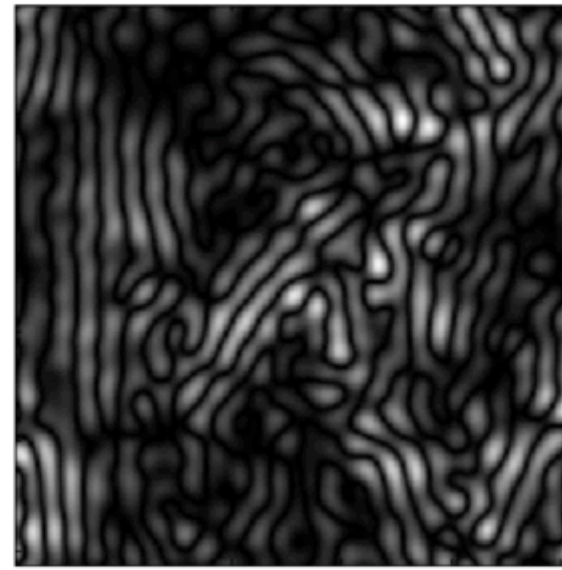
Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

Originale



Spettro

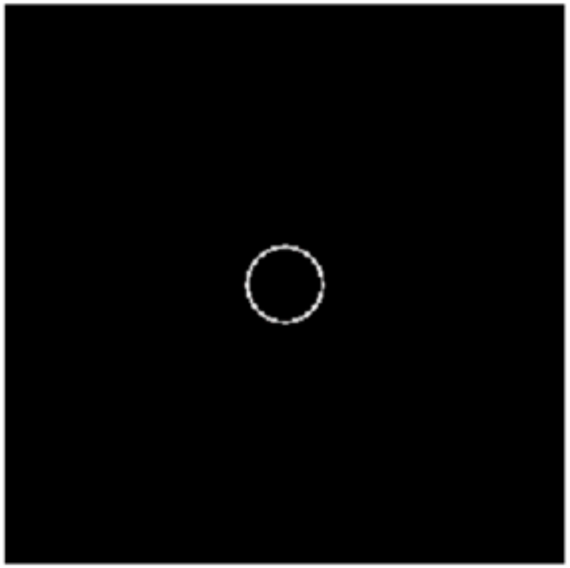


Ricostruita

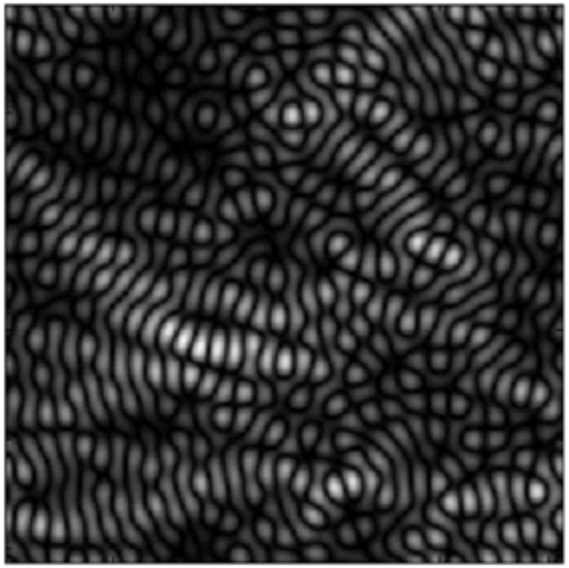
Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

Originale

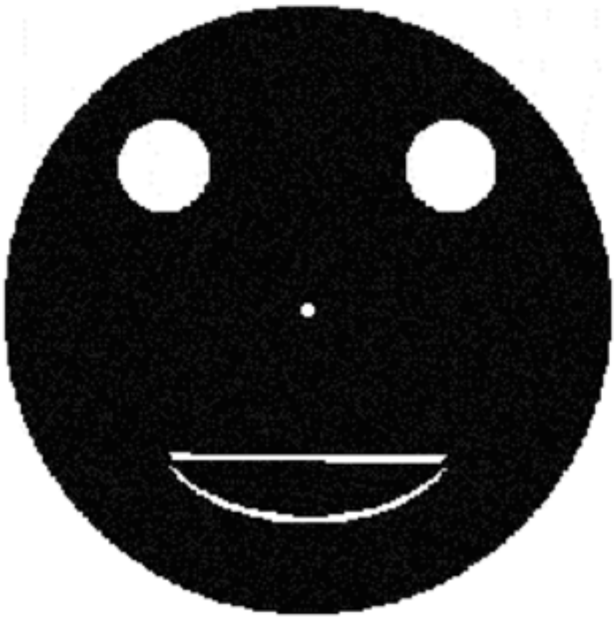


Spettro

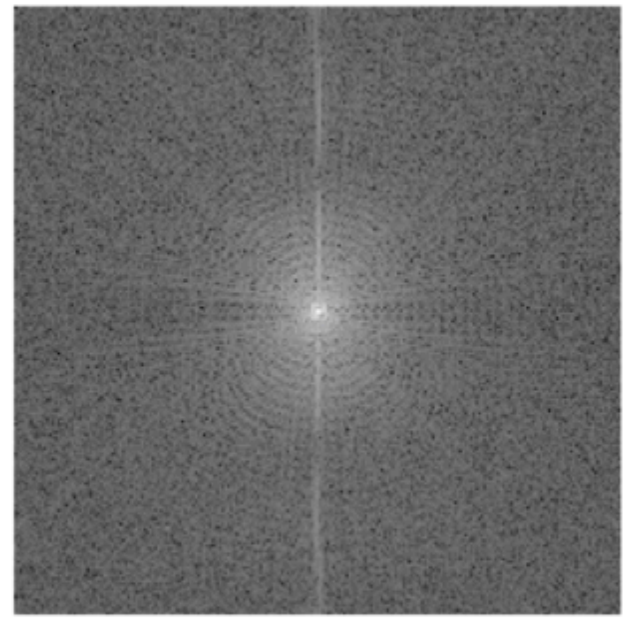


Ricostruita

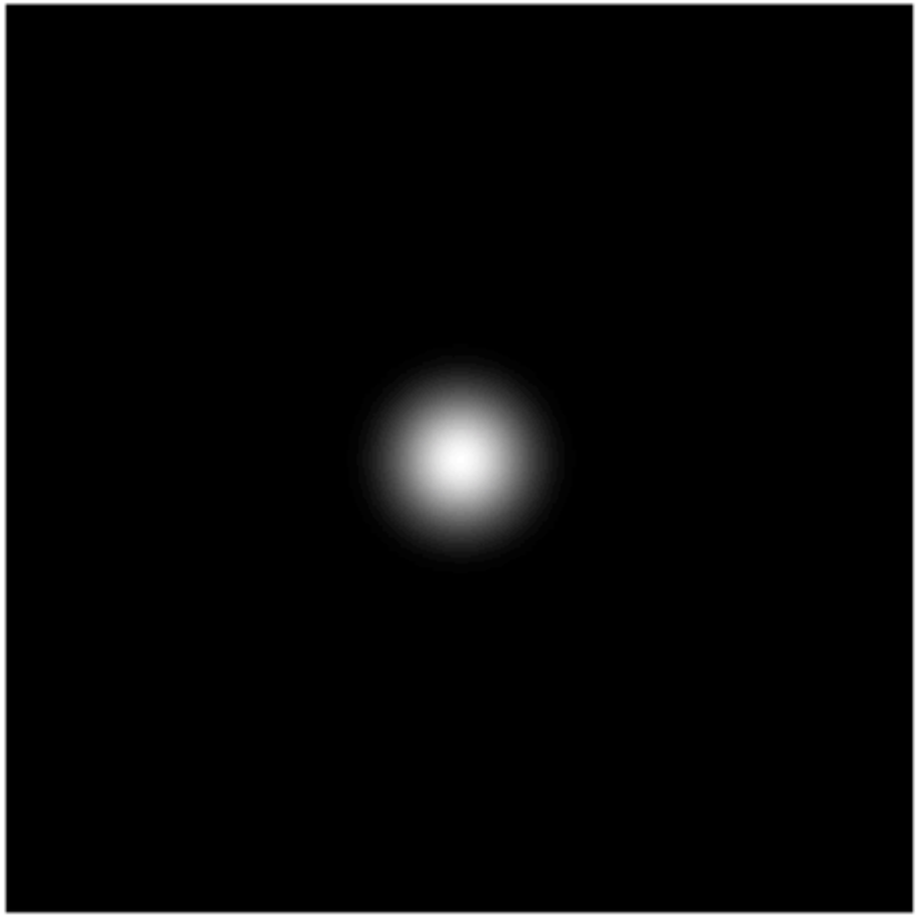
Immagine semplice



Spettro di Fourier



Funzione di Transferimento del Filtro



Il filtro si applica con un prodotto di convoluzione
nel dominio della trasformata dell'immagine

Spettro di Fourier dell'immagine filtrata

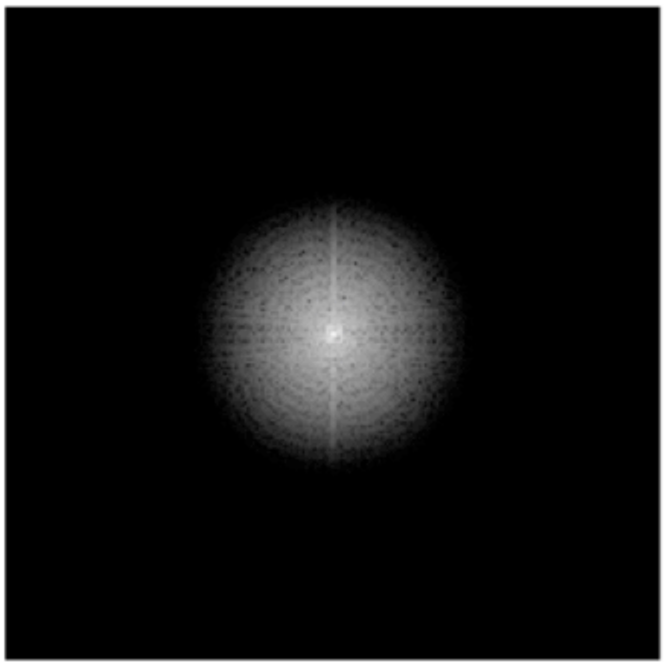


Immagine Filtrata

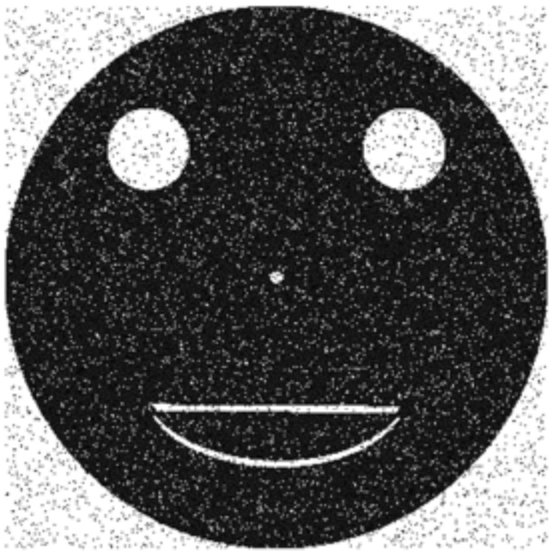


Immagine Filtrata