Esame di metodi numerici avanzati

(11-06-2010)

- *Metodi spettrali*
  Risolvere, utilizzando lo sviluppo in polinomi di Chebyshev ed il metodo Tau per le condizioni al bordo, la seguente equazione differenziale alle derivate ordinarie:
  $$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\pi^2 y, \qquad x \in [-1,+1]$$
  con condizioni al bordo: $y'(+1) = -\pi$, $y(-1) = 0$, utilizzando 5 punti di collocazione. Si ricorda la seguente formula ricorsiva per i coefficienti di Chebyshev della derivata seconda:
  $$a''_n = \frac{1}{b_n} \sum_{p=n+2}^{N} p(p^2 - n^2) a_p s_{p-(n+2)}$$
  dove:
  $$b_n = \begin{cases} 2 & \text{per } n = 0 \\ 1 & \text{per } n > 0 \end{cases} \qquad s_p = \begin{cases} 0 & \text{per } p \text{ dispari} \\ 1 & \text{per } p \text{ pari} \end{cases}$$
  N.B.: **NON** è obbligatorio, ai fini della correttezza dell'esercizio, risolvere il sistema finale di equazioni.

- *Metodi alle differenze finite*
  Ricavare uno schema alle differenze finite con errore al terzo ordine in Δx per la derivata prima forward di una generica funzione $f(x)$.

- *Metodi alle differenze compatte*
  Per calcolare la derivata prima di una funzione si può usare il seguente schema alle differenze compatte del quarto ordine:
  $$\frac{1}{4}f'_{i-1} + f'_i + \frac{1}{4}f'_{i+1} = \frac{3}{2}\frac{f_{i+1} - fi - 1}{2\Delta x}$$
  assieme al seguente schema del quarto ordine per i bordi:
  $$\begin{aligned} f'_0 + 3f'_1 &= \frac{1}{\Delta x}(\frac{-17}{6}f_0 + \frac{3}{2}f_1 + \frac{3}{2}f_2 - \frac{1}{6}f_3) \\ f'_N + 3f'_{N-1} &= \frac{1}{\Delta x}(\frac{17}{6}f_N - \frac{3}{2}f_{N-1} - \frac{3}{2}f_{N-2} + \frac{1}{6}f_{N-3}). \end{aligned}$$
  Scrivere lo schema in forma matriciale utilizzando $N = 4$ punti.

  Data la funzione $f(x) = 2x^4 + 3$ nell'intervallo $x = [0, 3]$, calcolare la sua derivata con lo schema precedente, dividendo l'intervallo con una griglia equispaziata di quattro punti. Verificare che l'errore commesso nel calcolo numerico della derivata è nullo e spiegarne il motivo.

- *Metodi Monte Carlo*

  La distribuzione di Weibull di parametri $\lambda > 0$ e $k > 0$ è definita tramite la funzione di densità di probabilità seguente:

  $$f(x) = \frac{k}{\lambda^k} x^{k-1} e^{-(\frac{x}{\lambda})^k}$$

  Disponendo di un generatore lineare congruente di numeri casuali per una variabile y, indicare se e come è possibile ottenere una variabile x distribuita secondo Weibull.