

Esame di metodi numerici avanzati
(Appello del 24-04-2009)

1. *Metodi spettrali.*

Data la funzione: $f(x) = 1 + \cos(2x)$, definita nell'intervallo reale $x \in [0, 2\pi]$, calcolare, tramite il metodo di collocazione, i coefficienti a_n della trasformata di Fourier della funzione $f(x)$, definita come:

$$f(x) = \sum_{n=-N/2}^{+N/2} a_n e^{inx}$$

nel caso di $N = 4$ punti. Spiegare cosa succederebbe se la funzione di cui calcolare la trasformata fosse $g(x) = \sin(3x)$. (10 punti).

2. *Metodi alle differenze finite.*

Si consideri la seguente equazione parabolica unidimensionale:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A \frac{\partial f}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

dove $f = f(x, t)$, $A > 0$ e $\nu > 0$.

- (a) Discretizzare l'equazione precedente utilizzando uno schema di Eulero $[O(\Delta t)]$ per la derivata temporale e schemi alle differenze finite centrate $[O(\Delta x^2)]$ per le derivate spaziali. (Discutere nel dettaglio la derivazione matematica degli schemi utilizzati).
- (b) Calcolare il fattore di amplificazione di Von Neumann dello schema ottenuto.
- (c) Cosa accade per $\nu \rightarrow 0$ allo schema considerato? (discutere). (10 punti).

3. *Metodi alle differenze compatte.*

Data una funzione $f(x)$, che sui punti di griglia x_0, x_1, \dots, x_N assume i valori f_0, f_1, \dots, f_N , si può scrivere il seguente schema per i bordi per il calcolo della derivata seconda:

$$\alpha f''_{N-1} + \beta f''_N + \gamma f'_N = a f_{N-1} + b f_N. \quad (2)$$

Questo schema permette di imporre come condizione al bordo, nella soluzione di un'equazione, un determinato valore della derivata prima nel punto x_N . Determinare i coefficienti α, β, γ, a e b in modo da ottenere uno schema del secondo ordine (l'errore è proporzionale a Δx^2) e calcolare anche l'errore. E' possibile ottenere uno schema dello stesso tipo di ordine più elevato? (10 punti).

4. *Metodi Monte Carlo.*

Data una variabile x distribuita con una PDF uniforme: $p(x) = 1, \forall x \in]0, 1]$, trovare come dev'essere definita una nuova variabile y in modo che la sua densità di probabilità segua una legge di potenza del tipo: $p(y) = ay^{-b}$. (10 punti).