

**Esame di metodi numerici avanzati**  
(Appello del 24-04-2009)

1. *Metodi spettrali.*

Data la funzione:  $f(x) = 1 + \cos(2x)$ , definita nell'intervallo reale  $x \in [0, 2\pi]$ , calcolare, tramite il metodo di collocazione, i coefficienti  $a_n$  della trasformata di Fourier della funzione  $f(x)$ , definita come:

$$f(x) = \sum_{n=-N/2}^{+N/2} a_n e^{inx}$$

nel caso di  $N = 4$  punti. Spiegare cosa succederebbe se la funzione di cui calcolare la trasformata fosse  $g(x) = \sin(3x)$ . (10 punti).

2. *Metodi alle differenze finite.*

Si consideri la seguente equazione parabolica unidimensionale:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A \frac{\partial f}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

dove  $f = f(x, t)$ ,  $A > 0$  e  $\nu > 0$ .

- (a) Discretizzare l'equazione precedente utilizzando uno schema di Eulero  $[O(\Delta t)]$  per la derivata temporale e schemi alle differenze finite centrate  $[O(\Delta x^2)]$  per le derivate spaziali. (Discutere nel dettaglio la derivazione matematica degli schemi utilizzati).
- (b) Calcolare il fattore di amplificazione di Von Neumann dello schema ottenuto.
- (c) Cosa accade per  $\nu \rightarrow 0$  allo schema considerato? (discutere). (10 punti).

3. *Metodi alle differenze compatte.*

Data una funzione  $f(x)$ , che sui punti di griglia  $x_0, x_1, \dots, x_N$  assume i valori  $f_0, f_1, \dots, f_N$ , si può scrivere il seguente schema per i bordi per il calcolo della derivata seconda:

$$\alpha f''_{N-1} + \beta f''_N + \gamma f'_N = a f_{N-1} + b f_N. \quad (2)$$

Questo schema permette di imporre come condizione al bordo, nella soluzione di un'equazione, un determinato valore della derivata prima nel punto  $x_N$ . Determinare i coefficienti  $\alpha, \beta, \gamma, a$  e  $b$  in modo da ottenere uno schema del secondo ordine (l'errore è proporzionale a  $\Delta x^2$ ) e calcolare anche l'errore. E' possibile ottenere uno schema dello stesso tipo di ordine più elevato? (10 punti).

4. *Metodi Monte Carlo.*

Data una variabile  $x$  distribuita con una PDF uniforme:  $p(x) = 1, \forall x \in ]0, 1]$ , trovare come dev'essere definita una nuova variabile  $y$  in modo che la sua densità di probabilità segua una legge di potenza del tipo:  $p(y) = ay^{-b}$ . (10 punti).