Esame di metodi numerici avanzati
(*Appello del 02-10-2008*)

1. *Metodi spettrali.*
   Si consideri l'equazione di Korteweg-de Vries:
   $$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 6f\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$
   con condizione iniziale: $f(x, t = 0) = f_0(x)$ e condizioni al contorno periodiche nell'intervallo: $x \in [0, 2\pi]$. Indicando con FFT l'operatore che fa passare dai valori della funzione incognita f sui punti di collocazione x_j ai coefficienti a_k del suo sviluppo di Fourier e FFT^{-1} l'operatore inverso, utilizzando uno schema di Eulero al primo ordine, scrivere l'equazione che permette di ottenere il k-esimo coefficiente a_k dello sviluppo della soluzione al passo $n + 1$ in funzione dei coefficienti al passo n. *(10 punti)*

2. *Metodi alle differenze finite.*
   Si consideri una equazione iperbolica unidimensionale:
   $$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{1}$$
   dove $v < 0$ e $f = f(x, t)$.
   (a) si utilizzi uno schema upwind del I° ordine per la derivata spaziale e uno schema di Eulero del I° ordine per la derivata temporale, per trovare la soluzione f_i^{n+1}, supposto noto il valore di f allo step temporale n-esimo su tutti i punti di griglia $i = 1, \ldots, N_x$;
   (b) attraverso l'analisi di stabilità di Von Neumann, dimostrare che lo schema utilizzato nel punto (**??**) è stabile se risulta verificata la condizione CFL. *(10 punti)*

3. *Metodi alle differenze compatte.*
   Per calcolare la derivata prima di una funzione si può usare il seguente schema alle differenze compatte del quarto ordine:
   $$\frac{1}{4}f'_{i-1} + f'_i + \frac{1}{4}f'_{i+1} = \frac{3}{2}\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$
   assieme ai seguenti schemi del quarto ordine per i bordi:
   $$f'_0 + 3f'_1 = \frac{1}{\Delta x}\left(-\frac{17}{6}f_0 + \frac{3}{2}f_1 + \frac{3}{2}f_2 - \frac{1}{6}f_3\right)$$
   $$f'_N + 3f'_{N-1} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{17}{6}f_N - \frac{3}{2}f_{N-1} - \frac{3}{2}f_{N-2} + \frac{1}{6}f_{N-3}\right).$$
   Scrivere lo schema in forma matriciale nel caso di $N = 5$ punti griglia.

Data la funzione $f(x) = 2x^4 + 3$ definita nell'intervallo $x = [0, 4]$, calcolare la sua derivata con lo schema precedente, dividendo l'intervallo specificato con una griglia equispaziata di cinque punti. Verificare che l'errore commesso nel calcolo numerico della derivata è nullo e spiegarne il motivo. *(15 punti)*

4. *Metodi Monte Carlo.*
   Dato un generatore uniforme di numeri random x tale che: $0 < x < 1$, calcolare il valore che deve avere una variabile $y(x)$ che sia distribuita secondo la legge di probabilità:

$$p(y) = \frac{A}{1 + y^2}.$$

   essendo A una costante di normalizzazione. *(5 punti)*