

## Esame di metodi numerici avanzati

11-07-2008

### 1. Metodi spettrali:

Si consideri l'intervallo  $[-1, +1]$  diviso in tre punti di collocazione equispaziati di coordinate:  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = +1$ , rispettivamente. Utilizzando il metodo della proiezione di collocazione, calcolare i tre coefficienti  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  dello sviluppo di Chebyshev della funzione:  $f(x) = x^2$  nei punti di collocazione indicati. Noto che:  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$  e  $T_2(x) = 2x^2 - 1$ , verificare che i tre coefficienti  $a_n$  ottenuti soddisfino la relazione:  $f(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x)$  per ogni  $x$  [15 punti].

### 2. Metodi alle differenze finite:

Si consideri la funzione  $f(x) = \cos x$ , discretizzata su  $N_x$  punti di griglia nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ .

- Si ricavi una formula per il calcolo della derivata seconda di  $f(x)$  in un generico punto di griglia  $x_i$  (lontano dai bordi), con un errore  $\xi$  di ordine  $O(\Delta x^2)$ , dove  $\Delta x$  è la spaziatura della griglia.
- Si calcoli il valore di  $(d^2f/dx^2)_{x_i=\pi}$  con due valori diversi di  $\Delta x$ , utilizzando la formula ricavata nel punto a).
- Assumendo che  $\xi = c(\Delta x)^n$  (dove  $c$  è una costante ed  $n$  è un intero), si verifichi che  $n = 2$ . [10 punti].

### 3. Metodi alle differenze compatte:

Trovare l'errore di fase che si commette calcolando la derivata della funzione:  $f(x) = A \exp(ikx)$  con il seguente schema:

$$\frac{1}{4}f'_{i-1} + f'_i + \frac{1}{4}f'_{i+1} = \frac{3}{4h}(f_{i+1} - f_{i-1})$$

[10 punti].

### 4. Metodi monte carlo:

Nella figura nella pagina seguente è mostrato il rettangolo  $[0, 1] \times [0, 1]$  del piano  $(x, y)$ , ricoperto con  $N = 60$  punti, le cui coordinate sono scelte in maniera random all'interno del rettangolo specificato. Usando il metodo monte carlo per il calcolo degli integrali, valutare l'area descritta dal triangolo di punti:  $P_0 = (0, 0)$ ,  $P_1 = (1, 0)$  e  $P_2 = (1, 1)$  e confrontare il valore trovato con il valore esatto, valutando il relativo errore. Di quanto occorrerebbe aumentare il numero dei punti random per avere un errore più piccolo di un fattore 10? [5 punti].

