

Esame di Metodi Numerici Avanzati
(prova del 27-09-2007)

1. Metodi spettrali

Sia $f(x)$ una generica funzione definita su $N+1$ punti di collocazione, dove f_0, \dots, f_N sono i valori della f in tali punti nell'intervallo $x \in [-1, +1]$. Siano a_n , con $n = 0, \dots, N$, i coefficienti dell'espansione di Chebyshev della $f(x)$. Analogamente, sia $f'(x)$ la derivata prima della f ed a'_n i relativi coefficienti dell'espansione di Chebyshev. Gli a'_n sono esprimibili in termini degli a_n tramite la relazione:

$$a'_n = \frac{2}{b_n} \sum_{p=n+1}^N p s_{p-n-1} a_p, \quad n = 0, \dots, N$$

dove: $s_j = 1$ per j pari, $s_j = 0$ per j dispari, $b_n = 2$ per $n = 0$, $b_n = 1$ se $n > 0$. Discutere qualitativamente, spiegando il metodo nel dettaglio, nel caso $N = 4$ (cioè utilizzando cinque punti di collocazione), come tale relazione possa essere utilizzata per risolvere l'equazione differenziale:

$$y'(x) = g(x), \quad y(-1) = 0$$

con $x \in [-1, +1]$, $y(x)$ funzione incognita e $g(x)$ nota.

2. Metodi alle differenze finite.

Si consideri l'equazione unidimensionale:

$$\frac{dE}{dx} = \rho(x)$$

dove $E(x)$ è il campo elettrico e $\rho(x)$ la densità di carica. Si discretizzi l'equazione precedente su una griglia uniforme composta da N_x punti di griglia separati da una spaziatura Δx , utilizzando uno schema alle differenze finite con errore $O(\Delta x^2)$. Si utilizzino schemi non centrati per le derivate spaziali ai punti di bordo $i = 1$ ed $i = N_x$. È necessario fornire una derivazione esplicita dettagliata degli schemi utilizzati per discretizzare la derivata spaziale nell'equazione (1) (pena la decurtazione di 8 punti!).

3. Metodi alle differenze compatte.

Nel seguente schema alle differenze compatte determinare i coefficienti a , b e α , imponendo che lo schema sia corretto fino al quinto ordine (l'errore è proporzionale a h^6):

$$\alpha f'_{i-1} + f' + \alpha f'_{i+1} = \frac{a}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1}) + \frac{b}{4h}(f_{i+2} - f_{i-2})$$

4. Metodi Montecarlo.

Un lago, la cui superficie è sconosciuta, è circoscritto da una zona quadrata di lato L . Per determinare l'area del lago, si chiede ad una truppa armata di tirare X colpi di cannone in modo aleatorio sulla zona quadrata di lato L . Sia N il numero di palle che sono cadute dentro il lago. Trovare una espressione per ottenere la superficie del lago e commentarla.