Esame di Fisica computazionale
Appello del 09-06-2015

La funzione di Airy è la soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0$$

La soluzione di tale equazione rappresenta la più semplice equazione del secondo ordine con un punto dove la natura della soluzione cambia da oscillatoria ad esponenziale.

Risolvere l'equazione data nell'intervallo di valori $x \in [-10, +5]$ a partire dalle condizioni iniziali:

$$y(0) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(2/3)}$$
$$y'(0) = -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma(1/3)}$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione Gamma di Eulero, definita dalla formula:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{dt}$$

In pratica, calcolare il valore della funzione Γ di Eulero con il metodo di Cavalieri-Simpson, per ottenere il valore delle condizioni iniziali con cui integrare l'equazione. Quindi procedere per valori positivi di $x \in [0, +5]$ con una discretizzazione h positiva, e ripartire da $x = 0$ e utilizzare un valore di h negativo per ottenere la soluzione nell'intervallo $x \in [-10, 0]$. Nota: se si prova a calcolare l'integrale della funzione $\Gamma(z)$ per $z < 1$ l'integrale diverge in $x = 0$. Per eliminare il problema, utilizzare la relazione esatta:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

per valori di $z < 1$, in quanto nel calcolo di $\Gamma(z + 1)$ la divergenza per $x = 0$ scompare. Inoltre, naturalmente non è possibile calcolare numericamente un integrale su un intervallo infinito! Tuttavia, la funzione da integrare decresce velocemente con t. Basta quindi calcolare la funzione Γ svolgendo l'integrale su un'intervallo di valori di $z \in [0, 40]$, ed un numero sufficientemente alto di intervalli ($N = 10^6$) per avere un'approssimazione dell'integrale su un intervallo finito con almeno 5 cifre decimali esatte.