Esame di Fisica computazionale

Appello dell'11-07-2014

Traccia 1

La funzione $w(z)$ di Lambert è la funzione inversa di:

$$z(w) = w\mathrm{e}^{w} \tag{1}$$

cioé la soluzione della (1) fornisce tutti i $w(z)$ in un intervallo di valori: $z \in [-\mathrm{e}^{-1}, +\infty]$. Si noti che: $w(z = 0) = 0$.

Tale funzione è molto importante in statistica, teoria dei grafi e informatica (dove fornisce il livello di ramificazione di alcuni alberi), fisica. La conoscenza di $w(z)$ richiederebbe la soluzione numerica dell'equazione trascendente (1) per ogni fissato z.

Tuttavia, si può facilmente mostrare che la funzione $w(z)$ di Lambert per $z \geq 0$ è anche soluzione dell'equazione differenziale non lineare:

$$z[1 + w(z)]\frac{dw}{dz} = w(z) \tag{2}$$

con condizione iniziale: $w(0) = 0$. Si noti che:

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=0} = 1 \tag{3}$$

Si calcolino i valori della $w(z)$ per $z \in [0, 1]$ risolvendo l'equazione differenziale (2) con un metodo di Runge-Kutta al secondo ordine, con la condizione iniziale specificata. Si tenga presente la condizione (3).

Tenendo conto del fatto che, con 8 cifre significative esatte:

$$w(1) = 0.56714329 \tag{4}$$

scegliendo due differenti opportune risoluzioni, verificare se l'errore numerico segue la previsione teorica. In caso non la segua, riuscite a immaginare il perché?