Dinamica dell'atmosfera
Effetti della stratificazione

Leonardo Primavera

Dipartimento di Fisica
Università della Calabria

Effetti della stratificazione

- Finora abbiamo esaminato gli effetti della sola rotazione, considerando una pressione e densità omogenee lungo z.
- Nel caso di pura rotazione, a $Ro \ll 1$, tutto era indipendente dall'altezza z e i moti sono praticamente bi-dimensionali. Viceversa, a causa della stratificazione dovuta alla gravità le proprietà del fluido variano a varie altezze.
- Poiché la stratificazione disaccoppia i vari strati l'uno con l'altro, si hanno gradi di libertà addizionali e quindi nuovi tipi di moto sono possibili.

Effetti della stratificazione

- Consideriamo, per iniziare, un equilibrio statico in presenza della sola gravità $\Rightarrow$ stratificazione puramente verticale!
- È abbastanza intuitivo pensare che, se il gradiente di densità è diretto verso l'alto (cioé il fluido più pesante sta in basso e quello più leggero in alto), tale stratificazione è stabile, viceversa una situazione in cui il fluido più pesante sta al di sopra di quello più leggero risulterà instabile!
- Andiamo a verificare in formule questa intuizione...

Effetti della stratificazione

- Supponiamo per iniziare che il fluido sia incomprimibile e stratificato con una densità che varia lungo z secondo la legge:

$$\rho = \rho(z)$$

- Chiaramente, anche la pressione e la temperatura saranno influenzate dalla stratificazione, e varieranno con z.
- Di conseguenza, se si sposta un particella di fluido da una altezza z_0 ad una $z_0 + h$, la particella di fluido verrà a trovarsi in un ambiente in cui la pressione è diversa (quindi subirà uno spostamento a causa della differenza di pressione), tuttavia la sua densità rimarrà la stessa, avendo supposto il fluido come incomprimibile!

Effetti della stratificazione

- La particella di fluido subirà quindi una spinta di Archimede (verso l'alto o verso il basso, a seconda della stratificazione), quindi una forza pari al peso di fluido spostato. Supposto che la particella di fluido racchiuda un volume dV e una massa dm, la forza di cui risente la particella sarà data dalla differenza tra il peso della massa fluida a $z_0 + h$ e quella a z_0:

$$F_A = g\rho(z_0 + h)dV - g\rho(z_0)dV$$

- Per la **Legge di Newton**, l'accelerazione subìta dalla massa dm sarà tale da aversi:

$$dm\frac{d^2z}{dt^2} = \rho(z_0)dV\frac{d^2z}{dt^2} = F_A$$

- Semplificando dV avremo:

$$\rho(z_0)\frac{d^2z}{dt^2} = g[\rho(z_0 + h) - \rho(z_0)] \tag{1}$$

Effetti della stratificazione

- Supposto che h sia piccolo, lo sviluppo di Taylor di $\rho(z_0 + h)$ ci dà:

$$\rho(z_0 + h) \sim \rho(z_0) + \left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{z_0} h \quad \Rightarrow \quad \rho(z_0 + h) - \rho(z_0) \sim \left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{z_0} h$$

- Otteniamo quindi l'equazione:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{g}{\rho(z_0)} \left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{z_0} h = \frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 h = 0 \tag{2}$$

- Definiamo la quantità:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho(z_0)} \left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{z_0} \tag{3}$$

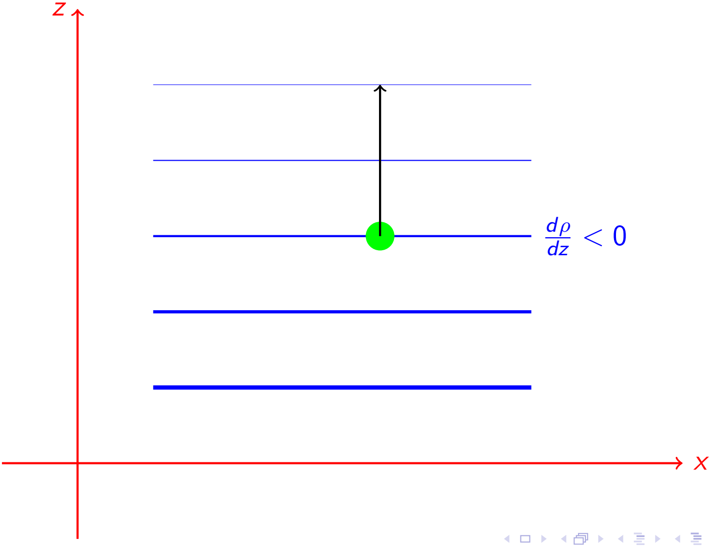
che è ha le dimensioni dell'inverso di un tempo ed è chiamata frequenza di stratificazione o di Brunt-Väisälä.

Effetti della stratificazione

- Possiamo avere due tipi di soluzioni distinte:
  1. $\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{z_0} < 0$, cioé densità decrescente con z, per cui: $N^2 > 0$ e quindi soluzioni oscillanti;
  2. $\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{z_0} > 0$, cioé densità crescente con z, per cui: $N^2 < 0$ e quindi soluzioni esponenzialmente crescenti o decrescenti.
- In pratica, nel caso 1) la particella di fluido è più pesante del fluido circostante e la spinta di Archimede è verso il basso. La particella ricade, ma per inerzia arriva più in basso rispetto alla sua posizione iniziale, quindi si troverà in un ambiente in cui è più leggera, quindi subirà una spinta di Archimede verso l'alto, ecc.
- Nel caso 2), la particella è sempre più leggera, quindi la spinta di Archimede è sempre verso l'alto...

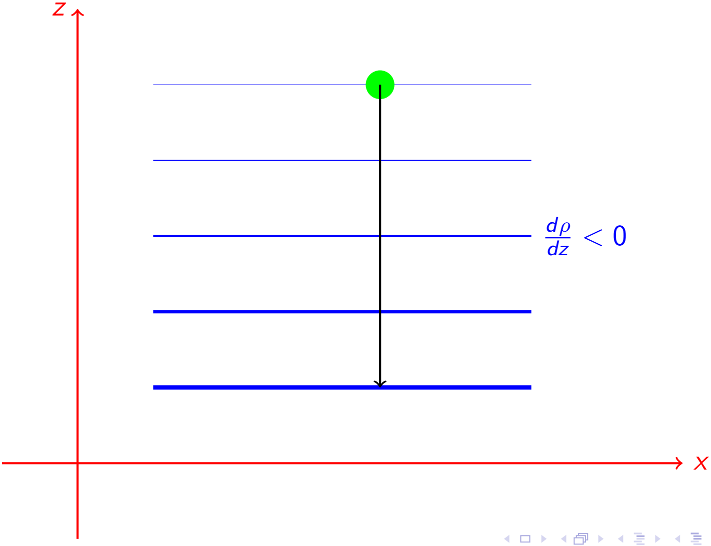
Effetti della stratificazione

Caso 1):



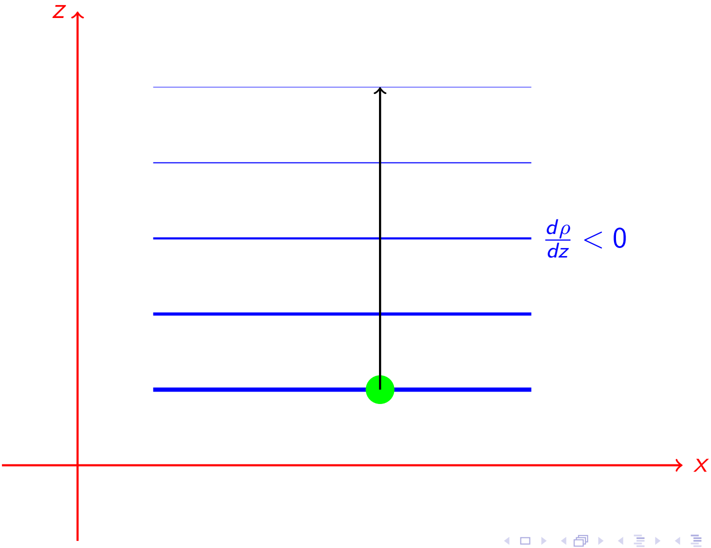
Effetti della stratificazione

Caso 1):



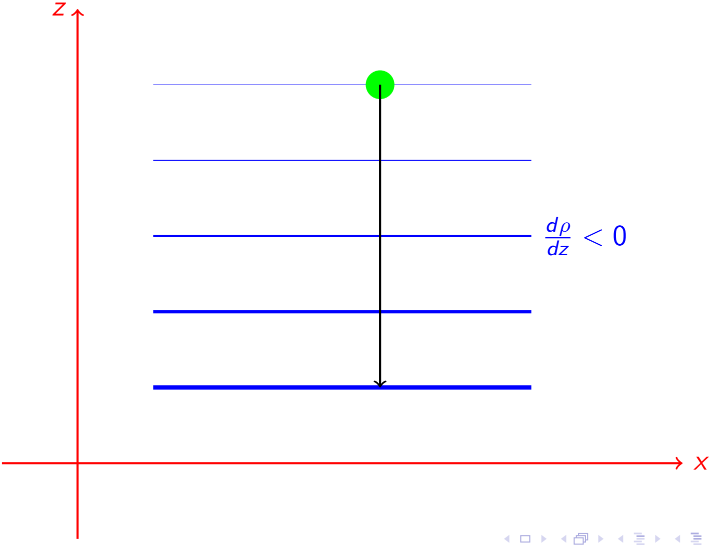
Effetti della stratificazione

Caso 1):

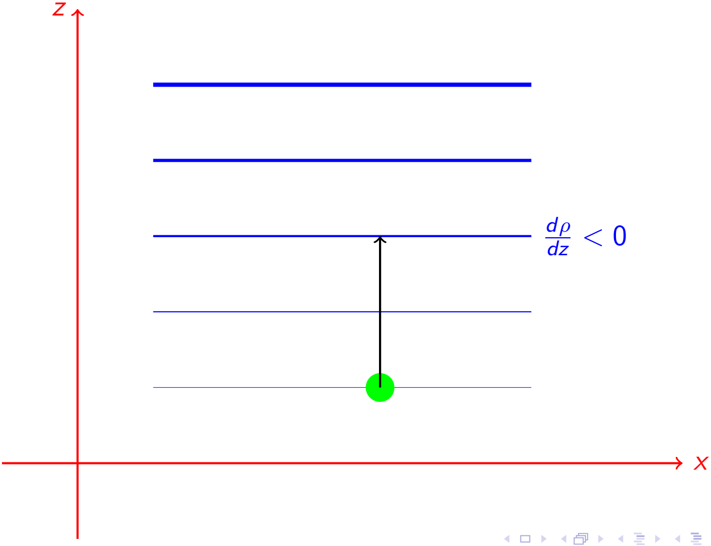


Effetti della stratificazione

Caso 1):

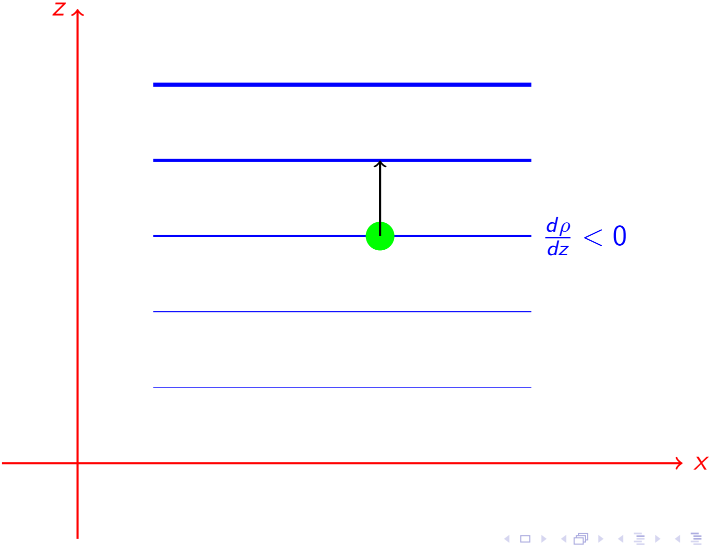


Caso 2):



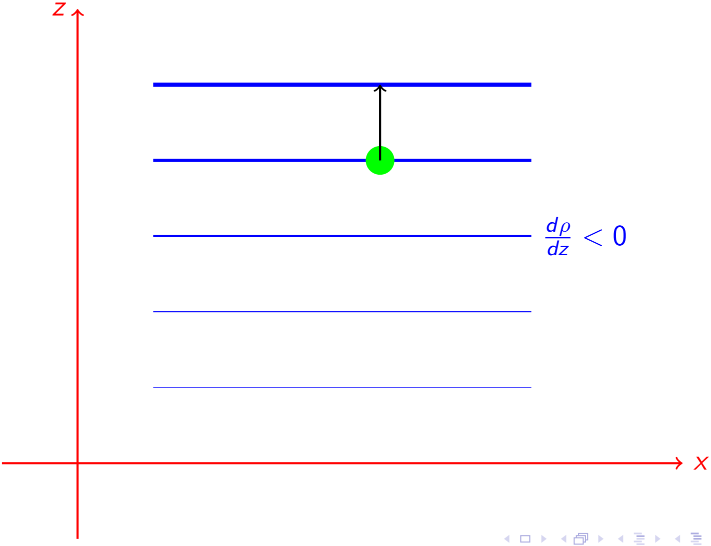
Effetti della stratificazione

Caso 2):

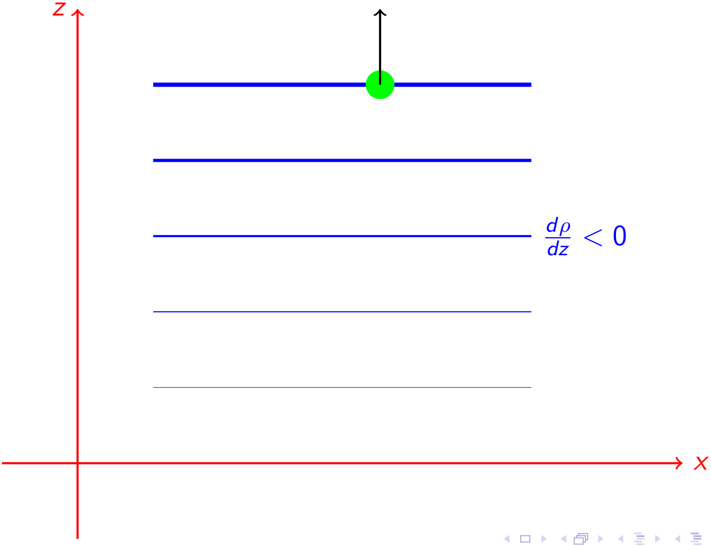


Effetti della stratificazione

Caso 2):



Caso 2):



Effetti della stratificazione

- Finora abbiamo supposto il fluido stratificato come incomprimibile. In questo caso, come abbiamo visto, la spinta di Archimede, e quindi la frequenza di Brunt-Väisälä dipendono **solo** dalla stratificazione $\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{z_0}$, ma **non** dalla temperatura.
- Se facciamo invece l'ipotesi che il fluido sia comprimibile, dobbiamo tener conto anche delle variazioni di temperatura.
- Ipotesi: gli spostamenti delle particelle fluide avvengono così rapidamente che possono considerarsi **adiabatici**:

$$p\rho^{-\gamma} = p_0\rho_0^{-\gamma}$$

- Insieme all'equazione di stato:

$$p = \rho\tilde{R}T \tag{4}$$

Effetti della stratificazione

- La condizione di adiabaticità equivale alle relazioni:

$$
\begin{aligned}
p &= p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \\
\rho &= \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma} \\
T &= T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

- Possiamo far vedere che la stratificazione in temperatura, sotto queste condizioni, ha gradiente costante:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{g}{\tilde{R}}$$

cioé la T decresce linearmente.

Effetti della stratificazione

- Poiché:

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{\tilde{R}}{c_p} \tag{6}$$

si ha:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p} \tag{7}$$

- Ripetendo il ragionamento fatto in precedenza, tenendo conto delle ipotesi appena fatte, si ha:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{g}{\rho(z_0)} \left[\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{z_0} + \frac{\rho(z_0) g}{\gamma \tilde{R} T(z_0)} \right] h = 0 \tag{8}$$

cioé definiamo la versione "comprimibile" della frequenza di Brunt-Väisälä:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho(z_0)} \left[\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{z_0} + \frac{\rho(z_0) g}{\gamma \tilde{R} T(z_0)} \right]$$

Effetti della stratificazione

- Si può mostrare che, di fatto, sono le perturbazioni della temperatura di equilibrio a generare le oscillazioni.
- Scegliendo una altezza di riferimento z_0 e definendo:

$$\sigma = \rho(z_0) \qquad \text{and} \qquad \theta = T(z_0) \tag{9}$$

chiamate, rispettivamente, densità potenziale e temperatura potenziale, avremo che potremo scrivere la frequenza di Brunt-Väisälä nel caso comprimibile in forma analoga al caso incomprimibile:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho}\left[\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{\gamma \tilde{R} T}\right] = -\frac{g}{\sigma}\frac{d\sigma}{dz} \tag{10}$$

Effetti della stratificazione

- In pratica, nel caso comprimibile, il solo gradiente della densità NON basta a definire le regioni di stabilità o di oscillazione, in quanto la dilatazione o il restringimento dei volumi di fluido causato dalla comprimibilità (ad es., causato dal fatto che vicino al terreno o sul mare l'aria si riscalda a causa della differente capacità termica del suolo o dell'acqua) può aumentare o diminuire il valore di N^2 e quindi stabilizzare o de-stabilizzare regioni a diversa temperatura.
- Naturalmente θ e σ dipendono dalla scelta dell'altezza di riferimento, cioé della pressione p_0. In genere, si sceglie z_0 come l'altezza del suolo e p_0 la pressione al livello del suolo:

$$p_0 = 1.03 \times 10^5 \text{Pa}$$

Numero di Froude

- Vogliamo ora misurare l'importanza della stratificazione.
- Nel caso di sola rotazione abbiamo visto come una misura dell'importanza della rotazione sia data dal numero di Rossby:

$$Ro = \frac{U}{L\Omega}$$

con. generalmente, $Ro \ll 1$.
- Tale quantità può anche intendersi come il **rapporto** tra il **tempo caratteristico della rotazione** (Ω^{-1}) e il **tempo inerziale** (tempo di spostamento delle masse fluide: L/U):

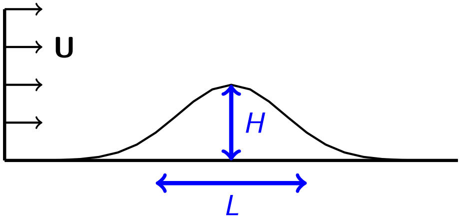
$$Ro = \frac{T_{\text{rotazione}}}{T_{\text{inerziale}}}$$

ovvero come **rapporto** tra la **distanza percorsa da una particella nel moto di rotazione** ($U\Omega^{-1}$) e la **distanza percorsa nel moto inerziale** (L):

$$Ro = \frac{L_{\text{rotazione}}}{L}$$

Numero di Froude

- Consideriamo un fluido stratificato che incontri, durante il moto, un ostacolo di altezza H e ampiezza L:



- Siano H ed L le altezze caratteristiche nella direzione orizzontale e verticale, rispettivamente.
- Siano invece U e W le corrispondenti componenti, orizzontale e verticale, della velocità.

Numero di Froude

- Il fluido può sorpassare l'ostacolo in 2 modi diversi:
  1. passandoci sopra;
  2. passandovi attorno.
- Nel caso (1), avremo una divergenza verticale del flusso:

$$\frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{W}{H}$$

- Nel caso (2), avremo invece una divergenza orizzontale:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{U}{L}$$

- L'importanza di un effetto rispetto all'altro è misurato dal rapporto:

$$\frac{W/H}{U/L} = Fr^2 = \frac{U^2}{N^2 H^2}$$

Numero di Froude

- La quantità:
$$Fr = \frac{U}{NH}$$
è chiamata numero di Froude e il suo quadrato misura quindi il rapporto tra la divergenza verticale e quella orizzontale.
- Il numero di Froude è l'analogo del numero di Rossby per la stratificazione.
- In effetti l'analogia è molto stretta: $Fr \ll 1 \Rightarrow$ **il fluido si sposta poco lungo la verticale** e il moto è soprattutto nella **direzione orizzontale**, quindi **bi-dimensionale**, in analogia a quanto accade per $Ro \ll 1$!

Effetti di Rotazione + Stratificazione

- Possiamo quindi chiederci cosa accade quando sia la rotazione che la stratificazione sono presenti.
- In questo caso, a differenza del precedente, i termini nelle equazioni di Navier-Stokes che devono bilanciare la pressione NON sono quelli dovuti alle forze d'inerzia:

$$(\mathbf{u}_H \cdot \nabla)\mathbf{u}_H$$

ma bensì il termine di Coriolis, come nel flusso geostrofico:

$$fv = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$-fu = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

da cui, per ordini di grandezza, si ottiene:

$$\Omega U \sim \frac{1}{\rho_0}\frac{\Delta P}{L}$$

Effetti di Rotazione + Stratificazione

- Ragionando come in precedenza, si trova che il rapporto tra la divergenza verticale e quella orizzontale è dato da:

$$\frac{W/H}{U/L} \sim \frac{U^2}{N^2 H^2} \frac{\Omega L}{U} = \frac{Fr^2}{Ro}$$

- Poiché generalmente: $Ro \ll 1$, questo implica che la divergenza verticale è **aumentata** rispetto al caso puramente stratificato!
- Tuttavia, poiché non può aversi una **divergenza verticale senza una convergenza orizzontale**, dobbiamo avere:

$$W/H \lesssim U/L$$

che implica:

$$Fr^2 \lesssim Ro \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{NH} \lesssim \frac{NH}{\Omega L} \tag{11}$$

Numero di Burger

- Tale relazione impone un limite superiore ai valori possibili del campo di velocità (U), ovvero alle possibili lunghezze caratteristiche (H ed L), una volta fissati i valori della rotazione (Ω) e della stratificazione (N).
- Ad esempio, se il campo di velocità U è imposto dall'esterno (ad es., per la presenza di un vento), la (11) fissa una relazione che H e L debbono soddisfare.
- La quantità adimensionale:

$$Bu = \left(\frac{NH}{\Omega L}\right)^2 = \left(\frac{Ro}{Fr}\right)^2$$

è detta numero di Burger, e misura l'importanza della stratificazione rispetto alla rotazione.

Numero di Burger

- In generale, in atmosfera, $H \ll L$, ma anche $N \gg \Omega$!
- Tipicamente, infatti:

$$\Omega = 1.16 \times 10^{-5} \mathrm{s}^{-1}; \qquad 1.67 \times 10^{-3} \leq N \leq 1.67 \times 10^{-2}$$

  corrispondenti a $T = 24\ h$ per Ω e $1\ min \leq T \leq 10\ min$ per N!
- Questo implica che il numero di Burger può assumere un range di valori abbastanza vasto, sia maggiori, che minori, che uguali ad 1.
- Per quanto detto:

$$\frac{W/H}{U/L} = \begin{cases} Fr^2 & \text{per pura stratificazione} \\ Ro & \text{per pura rotazione} \\ Fr^2/Ro & \text{in presenza sia di rotazione che di stratificazione} \end{cases}$$

Numero di Burger

- Ció vuol dire che:
  1. per $\frac{Fr^2}{Ro} < Ro$ $(Bu < 1)$ i moti verticali sono **maggiormente inibiti** a causa della stratificazione, rispetto al caso della pura rotazione;
  2. per $\frac{Fr^2}{Ro} > Ro$ $(Bu > 1)$ **la rotazione domina** nell'inibire i moti verticali;
  3. nel caso $\frac{Fr^2}{Ro} \sim Ro$ $(Bu \sim 1)$ **entrambi gli effetti sono importanti** nel rendere il moto quasi-bidimensionale.
- Nota che nel caso (3) si ha:

$$Bu = \left(\frac{NH}{\Omega L}\right)^2 \sim 1 \quad \Rightarrow \quad L \sim \frac{NH}{\Omega}$$

che vuol dire che, fissata la scala verticale H, poiché N ed Ω sono noti, questa relazione ci dice su quale scala orizzontale la rotazione e la stratificazione sono ugualmente importanti!

Onde di gravità interne

- Vediamo ora cosa accade se perturbiamo un fluido stratificato.
- E' esperienza comune che perturbando uno strato di fluido si generano delle onde e la gravità cerca di ristabilire l'equilibrio e si producono delle onde trasversali che tendono a propagarsi come una variazione di fase.
- Ipotesi:
  1. no rotazione + fluido ideale
  2. dominio infinitamente esteso in tutte le direzioni ($\Rightarrow$ periodicità!)
  3. fluttuazioni di ampiezza infinitesima ($\Rightarrow$ linearizzazione!)
  4. fluido incomprimibile ma stratificato in altezza (Boussinesq)

Onde di gravità interne

- All'equilibrio, si hanno una pressione e una densità stratificate, per le quali vale l'equilibrio idrostatico dovuto alla gravità:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \rho_0 + \bar{\rho}(z) \\
p &= p_0 + \bar{p}(z) \\
\vec{u} &= 0 \\
0 &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{d\bar{p}(z)}{dz} - \frac{1}{\rho_0}\bar{\rho}(z)g
\end{aligned}
$$

  Nota che, per l'approssimazione di Boussinesq, deve aversi: $|\bar{\rho}| \ll \rho_0$

- Sovrapponendo delle perturbazioni di ampiezza infinitesima, si hanno i campi:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \rho_0 + \bar{\rho}(z) + \epsilon\rho' \\
p &= p_0 + \bar{p}(z) + \epsilon p' \\
\vec{u} &= \epsilon\vec{u}'
\end{aligned}
$$

  con $\epsilon \ll 1$.

- Le equazioni fluide linearizzate, in assenza di rotazione, ma con stratificazione, diventano quindi:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} \\
\frac{\partial v'}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y} \\
\frac{\partial w'}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} g \rho' \\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w \frac{d\bar{\rho}}{dz} &= 0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Onde di gravità interne

- L'ultima equazione viene dal fatto che:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\rho = 0$$

  siccome sia la conservazione della massa che la approssimazione di Boussinesq ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$) devono valere simultaneamente.

- L'ultima equazione può anche essere riscritta tenendo conto della definizione della frequenza di Brunt-Väisälä:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{d\bar{\rho}}{dz}$$

- Da qui si ricava:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dz} = -\frac{\rho_0 N^2}{g}$$

Onde di gravità interne

- Ipotizziamo uno sviluppo del tipo:

$$f = \Re\{\tilde{f} e^{i\phi}\} = \Re\{\tilde{f} e^{i(kx+my+nz-\omega t)}\} \tag{13}$$

per una generica quantità f.

- sostituendo nelle equazioni linearizzate si ottiene un sistema omogeneo 5x5, la cui soluzione dà la relazione di dispersione:

$$\omega = \pm \frac{N\sqrt{k^2 + m^2}}{\sqrt{k^2 + m^2 + n^2}} \tag{14}$$

che è la relazione di dispersione per le **onde di gravità interne**.

- Notiamo che:
  1. si ha sempre che: $\omega \leq N$;
  2. il rapporto: $\frac{\sqrt{k^2+m^2}}{\sqrt{k^2+m^2+n^2}}$ è il coseno dell'angolo θ formato dal vettore d'onda $\mathbf{K} = k\hat{\mathbf{e}}_x + m\hat{\mathbf{e}}_y + n\hat{\mathbf{e}}_z$ con il piano $x - y$. Questo implica che la frequenza NON dipende da $\mathbf{K}$ ma solo da N e da θ;
  3. Il doppio segno in ω ci dice che l'onda si propaga allo stesso modo sia lungo la direzione di $\mathbf{K}$ che in verso opposto.

Onde di gravità interne

- Per semplificare i calcoli, ruotiamo il sistema in modo che il vettore d'onda **K** si venga a trovare nel piano $x - z$.
- In questo modo $m = 0$, cioé $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ che implica, dalla (12.2), che $v' = 0$, cioé le uniche componenti del campo di velocità dell'onda sono nel piano del vettore d'onda **K**.
- Cerchiamo quindi i vettori di polarizzazione.
- Trasformando in Fourier secondo la definizione (13) le equazioni (12) e tenendo conto del fatto che $m = 0$, si ottengono le relazioni:

$$\begin{aligned}
\omega \tilde{u} - \frac{k}{\rho_0}\tilde{p} &= 0 \\
\omega \tilde{w} + i\frac{g}{\rho_0}\tilde{\rho} - \frac{n}{\rho_0}\tilde{p} &= 0 \\
k\tilde{u} + n\tilde{w} &= 0 \\
-\frac{i\rho_0 N^2}{g}\tilde{w} + \omega\tilde{\rho} &= 0
\end{aligned} \tag{15}$$

Onde di gravità interne

- Facendo l'ipotesi che $\tilde{\rho}$ si possa scrivere nella forma:

$$\tilde{\rho} = |\rho| e^{i\phi_0}$$

  si ha:

$$\rho' = \Re\{\tilde{\rho} e^{i\phi}\} = |\rho| \cos(kx + nz - \omega t + \phi_0)$$

- Una volta ricavata l'espressione di $\tilde{\rho}$ e ρ', dalle (15) si ricavano le altre quantità:

$$\begin{aligned} w' &= \frac{\omega g}{\rho_0 N^2} |\rho| \sin(kx + nz - \omega t + \phi_0) \\ u' &= -\frac{n\omega g}{k\rho_0 N^2} |\rho| \sin(kx + nz - \omega t + \phi_0) \\ p' &= -\frac{n\omega^2 g}{k^2 N^2} |\rho| \sin(kx + nz - \omega t + \phi_0) \end{aligned}$$

Onde di gravità interne

- Poniamo:

$$U = \frac{ng}{k\rho_0 N^2}\omega|\rho| = \frac{ng|\rho|}{\rho_0 N\sqrt{k^2+n^2}}$$

avendo supposto che ω si propaghi nel verso positivo di $\mathbf{K}$.

- Possiamo quindi scrivere i vettori di polarizzazione come:

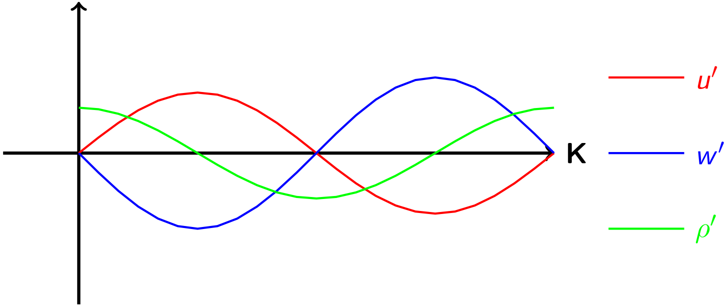
$$\begin{aligned} u' &= -U\sin(kx+nz-\omega t+\phi_0) \\ w' &= \frac{k}{n}U\sin(kx+nz-\omega t+\phi_0) \\ \rho' &= |\rho|\cos(kx+nz-\omega t+\phi_0) \\ p' &= -\frac{\rho_0\omega}{k}U\sin(kx+nz-\omega t+\phi_0) \end{aligned} \tag{16}$$

- La velocità di fase dell'onda è:

$$C = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2+n^2}}$$

Onde di gravità interne

- Dai vettori di polarizzazione si vede che le perturbazioni u' e w' sono in anti-fase, mentre la ρ' è sfasata di $\pi/2$ rispetto alla velocità:



- La condizione $\nabla \cdot u' = 0$ ci assicura che, nello spazio di Fourier $\vec{u}' \perp \mathbf{K}$, quindi queste onde sono trasversali.
- Il fatto che i picchi (o le valli) di ρ' si trovino in corrispondenza degli zeri di w' implica che il moto verticale si inverte quando la densità ha un minimo (è troppo bassa rispetto all'ambiente circostante) o un massimo (troppo grande rispetto all'ambiente circostante).
- L'energia si propaga alla velocità di gruppo:

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{K}} = \frac{\omega n^2}{k(k^2+n^2)}\hat{\mathbf{e}}_x - \frac{n\omega}{(k^2+n^2)}\hat{\mathbf{e}}_z$$

  Nota che: $\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{K} = 0$, che conferma che l'energia si propaga in direzione trasversale al vettore d'onda.

Onde di gravità interne

- Vediamo 2 casi estremi:

Caso 1: $\mathbf{K} = k\hat{\mathbf{e}}_x$, cioé l'onda si propaga nella direzione orizzontale.
In questo caso, $n = 0 \;\Rightarrow\; \theta = 0$, e la relazione di dispersione si riduce a: $\omega = \pm N$ e, dalla (15.3) questo implica che: $\tilde{u} = 0$.
Quindi l'onda si propaga lungo x, ma gli spostamenti sono verticali e, dalla (15.2) sono dovuti esclusivamente alla spinta di Archimede.
Questo è quindi proprio il caso che abbiamo visto all'inizio dell'argomento, quando abbiamo visto che un volumetto di fluido, spostato dalla sua posizione verticale, può mettersi ad oscillare alla frequenza di Brunt-Väisälä per effetto della spinta di Archimede.

Onde di gravità interne

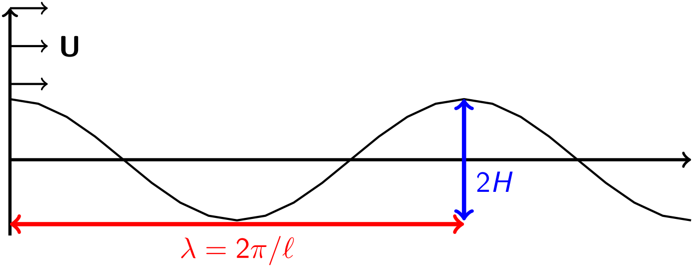
- Vediamo 2 casi estremi:

Caso 2: $\mathbf{K} = n\hat{\mathbf{e}}_z$, cioé l'onda si propaga nella direzione verticale.
In questo caso, $k = 0$ e quindi $\omega = 0$, cioé si tratta di un'onda stazionaria.
Dalla (15.3) si ha che, in queste condizioni: $\tilde{w} = 0$, cioé l'onda si propaga lungo la verticale, ma gli spostamenti sono orizzontali, come un insieme di fogli sovrapposti che posso scorrere liberamente l'uno sull'altro.

Onde di Lee

- Le onde di gravità interne possono essere generate da moltissimi processi differenti.
- Nell'atmosfera, un caso tipico è quello di un vento uniforme che soffia su un terreno irregolare.
- Modello semplice:
  1. onde lineari;
  2. irregolarità modellizzate come un'onda: $h = H \cos \ell x$, con H altezza dell'irregolarità del terreno, supposta piccola per onde lineari;
  3. frequenza di Brunt-Väisälä N supposta costante (stratificazione uniforme);
  4. vento che soffia con velocità $\mathbf{U}$ costante e uniforme;
  5. problema 2D: $\mathbf{U} \parallel \hat{\mathbf{e}}_x$.

Onde di Lee



- Finora abbiamo supposto che all'equilibrio il campo di velocità fosse nullo, quindi facciamo una trasformazione galileiana e ci mettiamo nel sistema che si muove con velocità $\mathbf{U}$ lungo x.
- In questo sistema, è il terreno a muoversi con velocità $-\mathbf{U}$ rispetto al vento, nella direzione x.

Onde di Lee

- Una massa di fluido vicino la superficie $z = 0$ si muoverà nel tempo come:
$$z = H\cos[\ell(x - Ut)] = H\cos(\ell x - \omega t)$$
dove poniamo:
$$\omega = \ell U \tag{17}$$
cioé è come se, a causa del vento, una particella di fluido fosse vista oscillare in direzione z con una frequenza ω, una ampiezza H e una lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/\ell$.
- Poiché la velocità verticale w' non è altro che la derivata materiale dello spostamento verticale h, abbiamo:
$$w' = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x}$$
all'altezza $z = 0$ (perché h è solo funzione di x e t).

Onde di Lee

- Per piccole perturbazioni $u = \epsilon u'$, possiamo assumere: $h \sim \epsilon$, per cui il secondo termine scompare nell'approssimazione lineare, per cui:

$$w' = \frac{\partial h}{\partial t} = H\omega \sin(\ell x - \omega t)$$

- Confrontando questa espressione (che vale per $z = 0$) con la soluzione (16) nel caso $z = 0$, si ottengono le relazioni:

$$k = \ell$$

$$H\omega = \frac{k}{n} U$$

- Dalla (17) otteniamo:

$$\frac{k}{n} U = H\omega = kHU$$

e quindi:

$$w = \frac{kU}{n} \sin(kx + nz - \omega t + \phi_0) = kUH \sin(kx + nz - \omega t + \phi_0)$$

Onde di Lee

- Confrontando la ω ottenuta tramite la relazione di dispersione (14) e dalla (17), otteniamo:

$$kU = \frac{Nk}{\sqrt{k^2+n^2}} \quad \Rightarrow \quad n^2 = \frac{N^2}{U^2} - k^2$$

che fornisce la relazione:

$$n = \pm\sqrt{\frac{N^2}{U^2} - k^2}$$

- Si possono avere 2 casi:

Onde di Lee

- Caso 1: $\frac{N^2}{U^2} - k^2 \geq 0$

In questo caso, n è reale. Scegliendo come significativa solo la soluzione col $+$ (perché l'onda proviene dal basso), si ottengono soluzioni oscillanti.
La velocità di gruppo è data da:

$$\mathbf{v}_g = \frac{Un^2}{K^2}\hat{\mathbf{e}}_x - \frac{nkU}{K^2}\hat{\mathbf{e}}_z$$

avendo tenuto conto del fatto che: $\omega = kU$ e avendo posto: $K^2 = k^2 + n^2$.
A questo valore dobbiamo sommare lungo la direzione x il moto medio dovuto al vento, pari ad U.

Onde di Lee

- Caso 2: $\frac{N^2}{U^2} - k^2 < 0$

  In questo caso si ottengono per n due soluzioni complesse coniugate, per cui l'onda diviene esponenzialmente smorzata con l'altezza z. Le corrispondenti soluzioni per le perturbazioni sono:

$$
\begin{aligned}
u' &= -aUHe^{-az}\cos(kx - \omega t + \phi_0) \\
w' &= \ell UHe^{-az}\sin(kx - \omega t + \phi_0) \\
\rho' &= \frac{\rho_0 N^2 H}{g} e^{-az}\cos(kx - \omega t + \phi_0) \\
p' &= -\rho_0 a U^2 He^{-az}\cos(kx - \omega t + \phi_0)
\end{aligned}
$$

dove:

$$
a = \sqrt{k^2 - \frac{N^2}{U^2}}
$$