Dinamica dell'atmosfera
Equazioni Shallow Water e onde

Leonardo Primavera

Dipartimento di Fisica
Università della Calabria

Degenerazione geostrofica

- Come abbiamo visto, la soluzione geostrofica è semplice, ma determina il campo di velocità esclusivamente in funzione del campo di pressione.
- Nella realtà le fluttuazioni di velocità, che abbiamo trascurato nel caso geostrofico attraverso l'assunzione $Ro \ll 1$, influenzano a loro volta il campo di pressione (vedi, ad es., il caso di fluido incomprimibile, in cui la pressione è ottenuta dal campo di velocità!).
- Poiché tuttavia le equazioni fluide sono comunque troppo complicate per poterle risolvere in maniera generale, faremo delle approssimazioni la cui validità andrà valutata caso per caso!.

Modello Shallow-water

- Facciamo le seguenti ipotesi semplificative:
  1. lo strato di fluido è sottile;
  2. densità uniforme, cioé il fluido è supposto omogeneo e incomprimibile. Questa è una **ipotesi alquanto drastica**!
     Nota che questo implica anche:
     $$\nabla \rho = 0$$
     cioè il fluido è barotropico;
  3. sistema cartesiano (quindi ignoriamo i termini di curvatura) con:
     $$\vec{\Omega} // \hat{z} \ \Rightarrow f = 2\Omega;$$
  4. la pressione dello strato superiore di fluido è supposta costante $= \ \tilde{p}_0$ (anche se questa ipotesi non è strettamente necessaria);
  5. il fluido è incomprimibile, dalla condizione 2), quindi $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ dappertutto;
  6. la viscosità è trascurabile ($\mu = 0 \ \Rightarrow \ Ek = 0!$).

Modello Shallow-water

- Se poniamo:
$$\delta = \frac{H}{L} \ll 1$$
dalla condizione 5) abbiamo:
$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{U}{L}} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{U}{L}} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{\frac{W}{H}} = 0 \Rightarrow \frac{U}{L} \sim \frac{W}{H} \Rightarrow W \sim \delta U$$
e quindi: $W \ll U$.

Modello Shallow-water

- In questo caso, le equazioni fluide diventano:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + fu &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g
\end{aligned} \qquad (1)$$

- Se ora analizziamo per ordini di grandezza, dalla (1.1-2) otteniamo:

$$P \sim \rho L \max\left(\frac{U^2}{L}, \Omega U\right) \sim \rho U^2 \max\left(1, Ro^{-1}\right)$$

- Di conseguenza, dalla (1.3) abbiamo:

$$\frac{\left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|}{\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right|} \sim \frac{\delta^2}{\max\left(1, \frac{1}{Ro}\right)}$$

Modello Shallow-water

- Non stiamo qui facendo nessuna ipotesi sul Ro, ma in ogni caso il termine a sx nell'ultima equazione è trascurabile!
- La (1.3) quindi equivale a:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \textbf{equilibrio idrostatico lungo } z\textbf{!}$$

- Integrando questa equazione lungo z, imponendo la condizione che a $z = h(x, y)$ la pressione sia costante (dalla condizione 4)! si trova:

$$p = \tilde{p}_0 + \rho g[h(x, y) - z]$$

- da cui si trova che i secondi membri delle (1.1-2) sono:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x}$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -g\frac{\partial h}{\partial y}$$

Modello Shallow-water

- Ma questo implica che le componenti u e v **NON** possono dipendere da z, in quanto le rispettive accelerazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - g\frac{\partial h}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - g\frac{\partial h}{\partial y}$$

  non dipendono da z!

- Di nuovo, come nel caso geostrofico, troviamo quindi che u e v sono indipendenti da z. Nota che questa è una diretta conseguenza del Teorema di Taylor-Proudman, essendo $\vec{\Omega}//\hat{z}$ e il fluido **barotropico**, valendo le ipotesi 2), 3) e 6).

Modello Shallow-water

- Dalla condizione: $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, integrando lungo z, otteniamo:

$$w(x, y, z, t) = -z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tilde{\omega}(x, y, t) \qquad (2)$$

essendo $\tilde{\omega}$ una funzione generica, perché u e v non dipendono da z.

- Possiamo far vedere che, sul fondo: $z = h_B(x, y)$, si ha, per la (2):

$$w(x, y, z = h_B, t) = u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y} = -h_B \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tilde{\omega}(x, y, t)$$

da cui si ottiene:

$$\tilde{\omega}(x, y, t) = u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y} + h_B \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Modello Shallow-water

- Inserendola nella (2), ci dà:

$$w(x,y,z,t) = -z\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\frac{\partial h_B}{\partial x} + v\frac{\partial h_B}{\partial y} + \\ + h_B\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (3)$$

- A $z = h(x,y,t)$ vale un discorso analogo, a meno del fatto che questa volta h dipende anche dal tempo, per cui ricaviamo, usando la (3):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}(h - h_B) + v\frac{\partial}{\partial y}(h - h_B) + (h - h_B)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

Modello Shallow-water

- Definendo:

$$H = h - h_B = H(x, y, t)$$

che rappresenta la profondità del fluido,

- Inserendo H nell'equazione precedente, otteniamo:

$$\frac{dH}{dt} = -H\left(\nabla \cdot \vec{u}_H\right) = -H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{4}$$

cioé se si ha una convergenza delle linee di flusso $(\nabla \cdot \vec{u}_H < 0)$ la profondità del fluido deve aumentare $(\frac{\partial H}{\partial t} > 0)$, e viceversa.

Modello Shallow-water

- Otteniamo infine il set di equazioni **Shallow-water**:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -g\frac{\partial h}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -g\frac{\partial h}{\partial y} \\
\frac{dH}{dt} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

  cioé usiamo l'equazione per la profondità H invece dell'equazione per w!

- Nota come questa sia una notevolissima semplificazione del problema, dato che ora tutte le quantità dipendono solo da t, x, y ma non più da z! Il problema è quindi diventato bi-dimensionale!

- Infatti, se ricaviamo dalla (4) la quantità:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{1}{H}\frac{dH}{dt}$$

  e la sostituiamo nella (2), otteniamo:

$$\frac{1}{H}\frac{dz}{dt}-\frac{z-h_B}{H^2}\frac{dH}{dt}-\frac{1}{H}\left(u\frac{\partial h_B}{\partial x}+v\frac{\partial h_B}{\partial y}\right)=0 \qquad (6)$$

  che equivale alla:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z-h_B}{H}\right)=0$$

- La quantità $\frac{z-h_B}{H}$ varia tra 0 e 1 e rappresenta l'altezza della particella di fluido relativa alla profondità.

Vorticità potenziale

- Nelle stesse ipotesi viste finora, andiamo a calcolarci la vorticità:

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$
$$\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

- Vedendo come scalano le varie quantità si trova:

$$\omega_x,\ \omega_y \ll \omega_z$$

cioé la sola componente dominante della vorticità è quella lungo z!

- Poniamo:

$$\zeta = \omega_z$$

Vorticità potenziale

- Derivando la (5.1) rispetto a y e la (5.2) rispetto a x e sottraendo membro a membro le due equazioni così ottenute, dopo alcuni calcoli, otteniamo:
$$\frac{d\zeta}{dt} = -(\zeta + f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
che vuol dire che:
  1. la convergenza dei tubi vorticosi può far crescere ζ (vortex-tube stretching)
  2. non si può avere vortex-tube tilting perché la condizione di bi-dimensionalità verrebbe violata.

Vorticità potenziale

- Combinando questa equazione con la (4) e definendo la quantità:

$$\Pi_S = \frac{\zeta + f}{H}$$

otteniamo:

$$\frac{d\Pi_S}{dt} = 0$$

cioé Π_S è conservata durante il moto della colonna di fluido!
- Questa quantità, o la stessa divisa per ρ, è la vorticità potenziale.

Onde lineari

- Il sistema di equazioni (5) ottenute può essere riscritto nella forma:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g\frac{\partial h}{\partial x} \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g\frac{\partial h}{\partial y} \\
&\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} + \frac{\partial (vH)}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

  con $H(x, y, t) = h(x, y, t) - h_B(x, y)$.
- Tale sistema è NON LINEARE! Possiamo linearizzarlo e quindi cercare come si propagano perturbazioni di piccola ampiezza nel fluido.
- Questo ci permetterà anche di stimare un ordine di grandezza dei tempi caratteristici dei fenomeni atmosferici.

Onde lineari

- Supponiamo quindi di avere una soluzione di equilibrio:

$$u_0 = v_0 = 0 \qquad \text{e} \qquad H_0 = H_0(x, y) \tag{8}$$

indipendente dal tempo.

- Cioé il fluido è supposto in quiete e il profilo dello strato superiore è stazionario.
- La (8) è una soluzione sse:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(H_0 + h_B) = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(H_0 + h_B) = 0$$

cioé il profilo imperturbato h dev'essere piano, com'è naturale!

Onde lineari

- Supponiamo quindi di applicare a questo stato delle piccole perturbazioni fatte come:

$$\begin{aligned} u &= \epsilon u'(x,y,t) \\ v &= \epsilon v'(x,y,t) \\ H &= H_0(x,y) + \epsilon\eta(x,y,t) \end{aligned} \tag{9}$$

  con $\epsilon \ll 1$.
- Linearizziamo le equazioni, cioé teniamo solo i termini in ϵ, trascuriamo i termini di ordine superiore (in ϵ^2), eliminiamo i termini che soddisfano le equazioni dell'equilibrio e otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} - fv' &= -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + fu' &= -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(H_0 u')}{\partial x} + \frac{\partial(H_0 v')}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Onde lineari

- Ridefinendo:

$$U = H_0 u'$$
$$V = H_0 v'$$

le (10), moltiplicando membro a membro per H_0, ci dànno:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} - fV &= -gH_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial t} + fU &= -gH_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0\end{aligned} \tag{11}$$

- Possiamo ottenere un'unica equazione per la perturbazione η del profilo di profondità operando sulle (11) nel modo seguente...

Onde lineari

- Deriviamo la (11.1) in $\frac{\partial}{\partial x}$ e la (11.2) in $\frac{\partial}{\partial y}$ e sommiamo i risultati ottenuti:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial x}\right)-f\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)=-g\nabla\cdot(H_0\nabla\eta) \tag{12}$$

mentre, se deriviamo la (11.1) in $\frac{\partial}{\partial y}$ e la (11.2) in $\frac{\partial}{\partial x}$ e sottraiamo il primo risultato dal secondo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)+f\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial x}\right)=-g\left(\frac{\partial H_0}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial H_0}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \tag{13}$$

Onde lineari

- Infine, deriviamo la (12) rispetto a $\frac{\partial}{\partial t}$ e sostituiamo il termine:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

ottenuto nella (13). Abbiamo così:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x}\right) + f^2\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x}\right) = \\
&= -g\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot(H_0\nabla\eta) - fgJ(H_0,\eta)
\end{aligned}$$

dove:

$$J(H_0,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_0}{\partial x} & \frac{\partial H_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial H_0}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial H_0}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

è lo **Jacobiano** di H_0 e η.

Onde lineari

- Possiamo a questo punto ottenere un'equazione **unica** per la sola η eliminando la quantità:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

  che possiamo ottenere dalla (11.3).

- Avremo quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right) - \nabla \cdot (C_0^2 \nabla \eta)\right] - fgJ(H_0, \eta) = 0 \qquad (14)$$

  avendo posto: $C_0^2 = gH_0$

Onde lineari

- La (14) rappresenta una equazione per $\eta(x, y, t)$ che, una volta risolta, ci fornisce il modo di calcolare u' e v'.
- Infatti, dalle (10.1-2), derivando $\frac{\partial}{\partial t}$ la prima rispetto al tempo e sostituendo la $\frac{\partial v'}{\partial t}$ ottenuta dalla seconda, abbiamo:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right) u' = -g \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial t} + f\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \tag{15}$$

- Analogamente, derivando $\frac{\partial}{\partial t}$ la seconda e sostituendo il $\frac{\partial u'}{\partial t}$ ottenuto dalla prima:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right) v' = -g \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial t} - f\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \tag{16}$$

- Quindi, una volta nota la $\eta(x, y, t)$ dalla (14), risolvendo le (15) e (16) si ottengono le perturbazioni di velocità orizzontale.

Moto geostrofico linearizzato

- Se consideriamo le fluttuazioni di velocità (e quindi η) come stazionarie, cioé $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, dalle (15) e (16) otteniamo:

$$u' = -\frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$v' = +\frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

  che, ricordando il legame tra η e h, e quindi tra h e p', sono equivalenti alle equazioni del moto geostrofico.
- Cioé, il moto geostrofico corrisponde ad una approssimazione lineare e stazionaria delle equazioni Shallow-water.
- Siccome η è sostanzialmente il campo di pressione, avremo che la velocità segue le isolinee del campo $\eta(x, y)$ come segue le isobare, cioé si mostra facilmente che:

$$\vec{u}_H \cdot \nabla \eta = 0$$

Moto geostrofico linearizzato

- È anche interessante notare che, per un moto stazionario, la (14) diventa:

$$J(H_0, \eta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H_0}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial H_0}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{17}$$

che implica che le isolinee di η coincidono con quelle di H_0.

- Quindi, nel moto geostrofico, il campo H_0 imperturbato determina le perturbazioni di pressione, le cui isolinee, come abbiamo visto, sono a loro volta le linee di flusso di $\vec{u}_H$!

Onde piane con profondità costante

- L'equazione (14), nonostante sia lineare, e quindi risolubile analiticamente, NON è semplice da risolvere. La complicazione principale viene dal fatto che $C_0^2 = gH_0$ e $H_0 = H_0(x, y)$, cioé l'equazione è a coefficienti **NON** costanti.
- Per cercare soluzioni in maniera semplice, facciamo quindi l'ulteriore ipotesi di supporre H_0 costante, cioé la profondità del fluido imperturbato è costante, quindi il profilo del fondo è, all'equilibrio, identico in forma a quello dello strato superiore del fluido:

$$h(x, y) = h_B(x, y) + \text{costante}$$

all'equilibrio!

Onde piane con profondità costante

- In questo caso:
$$J(H_0, \eta) = 0$$
e C_0^2 è costante e possiamo cercare una soluzione come una sovrapposizione di onde piane:
$$\eta(x, y, t) = \Re\{\eta_0(k_x, k_y, \omega) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}\} = \Re\{\eta_0 e^{i\theta}\} \tag{18}$$
con η_0 complesso.
- L'equazione (14), per C_0^2 costante diventa:
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right) - C_0^2 \nabla \cdot (\nabla \eta)\right] = 0$$
- Sostituendo la forma (18) per la perturbazione η, si arriva alla seguente relazione:
$$\omega \eta_0 [(-\omega^2 + f^2) + C_0^2 K^2] = 0 \tag{19}$$
dove $K^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Onde piane con profondità costante

- La (19), risolta, fornisce la **relazione di dispersione**:

$$\omega = \pm\sqrt{f^2 + C_0^2 K^2} \tag{20}$$

e la velocità di fase delle onde:

$$v_\phi = \frac{\omega}{K} = \pm\sqrt{C_0^2 + \frac{f^2}{K^2}} \tag{21}$$

che consta di due parti:

1. un'onda che esiste anche in assenza di rotazione ($f = 0$), la cui velocità di fase è: $v_\phi = C_0 = \sqrt{gH_0}$;
2. un contributo dovuto alla rotazione della terra.
   Nota che la frequenza delle onde è $\omega > f = 2\Omega$, quindi il periodo è sempre $< T_{\rm rot}/2$, dove $T_{\rm rot}$ è il periodo di rotazione della terra.

Onde piane con profondità costante

- Sostituendo la forma (18) nelle (15) e (16) e ipotizzando un analogo sviluppo per u' e v', abbiamo:

$$\Re\{u_0 e^{i\theta}\} = -\frac{g}{-\omega^2 + f^2}\Re\{\eta_0(\omega k_x + ifk_y)e^{i\theta}\}$$
$$\Re\{v_0 e^{i\theta}\} = -\frac{g}{-\omega^2 + f^2}\Re\{\eta_0(\omega k_y + ifk_x)e^{i\theta}\}$$

  con u_0 e v_0 coefficienti (**complessi**) degli sviluppi di u' e v', rispettivamente.

- Possiamo calcolarci le componenti di $\vec{u}_H$ nella direzione parallela e perpendicolare al vettore d'onda $\vec{K}$:

$$u_\parallel = \vec{u}_H \cdot \frac{\vec{K}}{K} = \Re\{-\frac{g\eta_0\omega K}{-\omega^2 + f^2}e^{i\theta}\}$$
$$u_\perp = \vec{u}_H - \vec{u}_\parallel \frac{\vec{K}}{K} = \Re\{i\frac{g\eta_0 f}{-\omega^2 + f^2}(-k_y\hat{\imath} + k_x\hat{\jmath})e^{i\theta}\}$$

Onde piane con profondità costante

- Prendendo i moduli quadri delle quantità, dividendo e sommando, otteniamo infine:

$$|u_{\|}|^2 + \frac{\omega^2}{f^2}|u_{\perp}|^2 = \frac{g^2\eta_0^2\omega^2 K^2}{-\omega^2 + f^2}$$

- Notiamo che, essendo:

$$C^2 = C_0^2 + f^2/K^2 \qquad \text{e} \qquad C_0^2 = gH_0$$

avremo:

$$-\omega^2 + f^2 = -C_0^2 K^2 \tag{22}$$

$$\frac{g^2\omega^2 K^2}{(-\omega^2 + f^2)^2} = \frac{C^2}{H_0^2}$$

da cui otteniamo:

$$|u_{\|}|^2 + \frac{\omega^2}{f^2}|u_{\perp}|^2 = \frac{C^2\eta_0^2}{H_0^2} \tag{23}$$

cioé le onde sono polarizzate ellitticamente.

Onde piane con profondità costante

- Infatti, la (23) può anche scriversi:

$$\frac{|u_{\|}|^2}{a^2} + \frac{|u_{\perp}|^2}{b^2} = 1$$

con: $a = \frac{H_0}{C\eta_0}$, $b = \frac{\omega H_0}{fC\eta_0}$, che è l'equazione di una ellisse di semiassi a e b.

- Notiamo che:

$$\frac{|u_{\|}|^2}{|u_{\perp}|^2} = \frac{\omega^2}{f^2}\cot^2\theta$$

e, poiché: $\omega > f$ dalla (20), a meno del fattore $\cot^2\theta$ la componente $u_{\|}$ parallela a $\vec{K}$ è, per lo più, maggiore della componente $\vec{u}_{\perp}$ perpendicolare a $\vec{K}$.

- Siccome:

$$\nabla\eta = \vec{K}\eta_0 e^{i\theta}$$

$\vec{K}$ è anche la direzione del gradiente di η, cioé del **gradiente di pressione**!

Onde piane con profondità costante

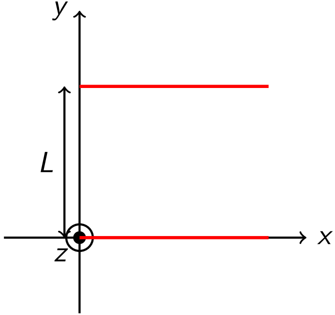
- In altri termini, le fluttuazioni di velocità seguono in questo caso, per lo più, i gradienti di pressione, al contrario di quanto accade nel moto geostrofico!
- Usando la prima delle (22), la definizione di η data dalla (18), ed il fatto che: $C_0^2 = gH$, abbiamo che la vorticità dell'onda è data da:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{gf\eta}{C_0^2} = \frac{f\eta}{H_0}$$

- Nota che questa quantità è di ordine ϵ (cioé al primo ordine), essendo le velocità stesse u e v di ordine ϵ!
- Questa relazione ci dice che, laddove la superficie libera cresce (cioé nelle creste dell'onda), la vorticità è positiva a causa del *vortex-tube stretching*. Viceversa, la vorticità è negativa nelle valli dell'onda.

Onde di Poincaré e onde di Kelvin

- Finora abbiamo studiato onde piane, cioé fluttuazioni lineari che possono propagarsi in un dominio infinitamente esteso sia in x che in y.
- Tale situazione è semplice, ma poco realistica.
- Analizziamo ora cosa succede quando imponiamo che ci siano dei bordi lungo una delle due direzioni, ad esempio la y.



Se i muri sono impenetrabili, la componente v lungo y della velocità deve annullarsi sulle pareti. Cioé, dalla (16):

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial t} - f\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \qquad (24)$$

per $y = 0$ e $y = L$.

Onde di Poincaré e onde di Kelvin

- L'equazione per η, per $H_0 =$ costante, è sempre la:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right) - C_0^2 \nabla \cdot (\nabla \eta)\right] = 0 \tag{25}$$

- Tuttavia, questa volta, non essendo più le quantità periodiche in y (ritenendo tuttavia l'ipotesi di periodicità in x e t) scriveremo che:

$$\eta(x, y, t) = \Re\{\tilde{\eta}(y) e^{i(kx - \omega t)}\} \tag{26}$$

dove $\tilde{\eta}(y)$ è una funzione (**complessa**) di y e k, questa volta, è il vettore d'onda nella sola direzione x.

- Inserendo la (26) nella (25), dopo alcuni calcoli avremo:

$$\frac{d^2\tilde{\eta}}{dy^2} + \left(\frac{\omega^2 - f^2}{C_0^2} - k^2 \right) \tilde{\eta} = 0 \tag{27}$$

- Inserendo invece la (26) nella (24) abbiamo:

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dy} + \frac{fk}{\omega}\tilde{\eta} = 0 \quad \text{a} \quad y = 0,\ y = L \tag{28}$$

Onde di Poincaré e onde di Kelvin

- Essendo le quantità in parentesi nella (27) tutte costanti, la soluzione generale dell'equazione è:

$$\tilde{\eta}(y) = A \sin(\alpha y) + B \cos(\alpha y) \tag{29}$$

con:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 - f^2}{C_0^2} - k^2 \tag{30}$$

- I coefficienti A e B devono essere determinati tramite la condizione ai bordi (28).

Onde di Poincaré e onde di Kelvin

- Per $y = 0$, la (28) fornisce:

$$\alpha A + \frac{fk}{\omega} B = 0 \tag{31}$$

mentre, per $y = L$:

$$A \left[\alpha \cos(\alpha L) + \frac{fk}{\omega} \sin(\alpha L) \right] + B \left[-\alpha \sin(\alpha L) + \frac{fk}{\omega} \cos(\alpha L) \right] = 0 \tag{32}$$

- Le (31) e (32) rappresentano un sistema omogeneo in A e B che ammette soluzione **non banale** sse il determinante della matrice dei coefficienti è nullo!

Onde di Poincaré e onde di Kelvin

- Ricordando la (30) che definisce α, dopo alcuni calcoli si perviene alla:

$$\frac{\sin(\alpha L)(\omega^2 - f^2)(\omega^2 - k^2 C_0^2)}{C_0^2 \omega^2} = 0 \tag{33}$$

- Poiché certamente $C_0^2 \omega^2 \neq 0$, abbiamo tre possibili soluzioni della (33):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha L) &= 0 \\ \omega^2 - k^2 C_0^2 &= 0 \\ \omega^2 - f^2 &= 0 \end{aligned} \tag{34}$$

Onde di Poincaré

- La (34.1) ci dice che: $\sin(\alpha L) = 0$, ovvero:

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{35}$$

- Nota che la soluzione $n = 0$, che implica $\alpha = 0$ è impossibile perché non permette che la v si annulli ai bordi, quindi va esclusa!
- Inserendo la (35) nella definizione di α (30), si arriva alla relazione di dispersione:

$$\omega = \pm\sqrt{f^2 + C_0^2\left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]} \tag{36}$$

che è analoga alla (20) per le onde piane con la notevole differenza che ora il vettore d'onda lungo y è quantizzato!

Onde di Poincaré

- Tali onde vengono chiamate **onde di Poincaré** e sono in tutto simili alle onde piane trovate in precedenza, a meno della quantizzazione in y.
- Nota che, spesso, per estensione, anche le onde piane definite in precedenza vengono chiamate **onde di Poincaré**.
- Le onde di Poincaré hanno diverse caratteristiche comuni con le onde piane studiate in precedenza:
  1. possono propagarsi sia nel verso positivo che negativo dell'asse x;
  2. anche in questo caso $\omega > f$ ed esistono anche in assenza di rotazione ($f = 0$), trasformandosi nelle ordinarie onde della SW.
- Per calcolare i campi $\eta(x, y, t)$, $u'(x, y, t)$ e $v'(x, y, t)$ dobbiamo calcolare le ampiezze A e B, che ora risulteranno dipendenti:

$$A = -\frac{fk}{\alpha\omega} B = -\frac{fkL}{n\pi\omega} B$$

Onde di Poincaré

- Rinominando $B = \eta_0 = |\eta_0| e^{i\phi}$ una generica **ampiezza complessa**, si ottiene l'espressione dei campi cercata:

$$\eta(x,y,t) = |\eta_0| \left[-\frac{fL}{n\pi C_x} \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \right] \cos(kx - \omega t + \phi)$$

$$u'(x,y,t) = \frac{|\eta_0|}{H_0} \left[\frac{C_0^2}{C_x^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L} y\right) - \frac{fL}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \right] \cos(kx - \omega t + \phi) \tag{37}$$

$$v'(x,y,t) = -\frac{|\eta_0|}{H_0} \frac{L}{n\pi\omega} \left[f^2 + C_0^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \sin(kx - \omega t + \phi)$$

  dove $C_x = \omega/k$ è la velocità di fase lungo x.
- Nota come, a differenza dell'onda piana, nell'onda di Poincaré la C_x dipende da n (quindi dalla struttura in y!) e la forma dell'onda in y nelle equazioni (37) dipende da C_x!

Onde di Kelvin

- La soluzione della (34.2) è:

$$\omega = \pm k C_0 \tag{38}$$

- Questa soluzione, com'è facile notare, esiste anche per $f = 0$, cioé in assenza di rotazione e può considerarsi la **soluzione mancante** dell'onda di Poincaré (equazione (36)) con $n = 0$!
- Per analizzare comè fatta questa soluzione, andiamo a sostituire la (38) nella equazione (27) per $\tilde{\eta}$, che diventa:

$$\frac{d^2\tilde{\eta}}{dy^2} - \frac{f^2}{C_0^2}\tilde{\eta} = 0$$

Onde di Kelvin

- Tale equazione ha per soluzione:

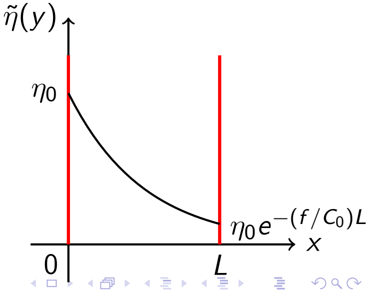
$$\tilde{\eta}(y) = Ae^{+(f/C_0)y} + Be^{-(f/C_0)y} \tag{39}$$

- Per determinare A e B, occorre tener conto della condizione al bordo (28) che, per $\omega = +kC_0$, fornisce: $A = 0$.

La soluzione (39) diventa quindi:

$$\tilde{\eta}(y) = \eta_0 e^{-(f/C_0)y} \tag{40}$$

cioé il profilo dell'onda decresce esponenzialmente andando dal bordo a $y = 0$ fino a $y = L$!



Onde di Kelvin

- Inserendo la (40) nella (26), troviamo:

$$\eta(x,y,t) = \Re\{\tilde{\eta}(y)e^{i(kx-\omega t)}\} = |\eta_0|e^{-(f/C_0)y}\cos[k(x - C_0 t) + \phi]$$

avendo posto: $\eta_0 = |\eta_0|e^{i\phi}$.

- Ipotizzando sviluppi simili per u' e v':

$$\begin{aligned} u' &= \Re\{\tilde{u}(y)e^{i(kx-\omega t)}\} \\ v' &= \Re\{\tilde{v}(y)e^{i(kx-\omega t)}\} \end{aligned}$$

e usando le (15) e (16) perveniamo alle relazioni:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{C_0}{H_0}|\eta_0|e^{-(f/C_0)y}\cos(kx - \omega t + \phi) = -\frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ v' &= 0 \end{aligned}$$

Onde di Kelvin

- Cioé, la componente u' è in equilibrio geostrofico, mentre la v' è nulla!
- Per $\omega = +kC_0$ il fluido tende ad addensarsi sul bordo $y = 0$ e si ha un perfetto equilibrio tra gravità e forza centrifuga per cui qualsiasi perturbazione può propagarsi solo lungo x.
- La forma del profilo in y dell'onda segue una legge esponenziale con rate di decadimento:

$$R = \frac{C_0}{f} \qquad \rightarrow \qquad \text{Raggio di deformazione di Rossby}$$

  che ha la dimensione di una lunghezza.
- Nota che, per $f \to 0$ (no rotazione!), si ha: $R \to \infty$, cioé il profilo in y dell'onda diventa piatto, esattamente come succederebbe al caso $n = 0$ dell'onda di Poincaré, che prima avevamo escluso perché non era compatibile con le condizioni ai bordi per v'. Tuttavia, per l'onda di Kelvin $v' = 0$, quindi questo caso è perfettamente legittimo!

Onde di Kelvin

- Cosa accade invece quando $\omega = -kC_0$?
- Rifacendo i calcoli, si trova che, in questo caso, nella (39):

$$\tilde{\eta}(y) = Ae^{+(f/C_0)y} + Be^{-(f/C_0)y}$$

  si ha $B = 0$.
- Di conseguenza:

$$\tilde{\eta}(y) = \eta_0 e^{+(f/C_0)y}$$

  cioé il profilo dell'onda **cresce** esponenzialmente andando da $y = 0$ a $y = L$.
- Nota che l'onda di Kelvin $\omega = +kC_0$ è compatibile con un dominio limitato solo da $y = 0$ (cioé $L \to \infty$). L'onda di Kelvin con $\omega = -kC_0$ NON è compatibile con tale condizione, perché l'onda **cresce esponenzialmente**.

Terza soluzione

- L'ultima soluzione possibile per la (34) è:

$$\omega = \pm f$$

tuttavia, possiamo far vedere che tale condizione è impossibile a verificarsi, tranne che come caso degenere dell'onda di Kelvin!

- Per far vedere che tale soluzione è spuria, cioé è stata introdotta dalle varie derivazioni che abbiamo effettuato per pervenire all'equazione (14) per η, facciamo vedere che essa NON SODDISFA le equazioni di partenza (11) per le perturbazioni del profilo di equilibrio!
- Ipotizziamo il solito sviluppo del tipo:

$$\eta(x, y, t) = \Re\{\tilde{\eta}(y)e^{i(kx-ft)}\}$$
$$u'(x, y, t) = \Re\{\tilde{u}(y)e^{i(kx-ft)}\}$$
$$v'(x, y, t) = \Re\{\tilde{\eta}(y)e^{i(kx-ft)}\}$$

dove abbiamo sostituito $\omega = +f$ nella parte dipendente dal tempo.

Terza soluzione

- Dopo vari calcoli si perviene alla relazione seguente:

$$\tilde{v}(y) = \frac{2if\eta_0}{kH_0}(1 - k^2R^2)\sinh(ky)$$

  la quale soddisfa la condizione al bordo $\tilde{v}(y = 0) = 0$, ma non può soddisfare contemporaneamente l'altra condizione al bordo: $\tilde{v}(y = L) = 0$, perché il sinh ammette un solo zero, quando l'argomento è nullo!

- Tale soluzione è quindi **non fisica**, tranne quando il termine $(1 - k^2R^2) = 0$, cioé quando:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{f}{C_0} \quad \Rightarrow \quad \omega = f = kC_0$$

  e l'onda degenera in un'onda di Kelvin (infatti, in questo caso, $\tilde{v}(y)$ risulta identicamente nullo!).

Sommario

In totale, possiamo riassumere il caso delle onde lineari shallow-water con profondità costante nella maniera seguente:

- Onde di Poincaré, caratterizzate dalla relazione di dispersione (36), che può essere adimensionalizzata come:

$$\frac{\omega}{f} = \pm\sqrt{1 + k^2R^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 R^2}$$

  che rappresenta un insieme di curve nel piano $\left(kR, \frac{\omega}{f}\right)$ che sta sempre al di sopra (o al di sotto) della retta che ha inclinazione a 45°:

$$\frac{\omega}{f} = \pm kR$$

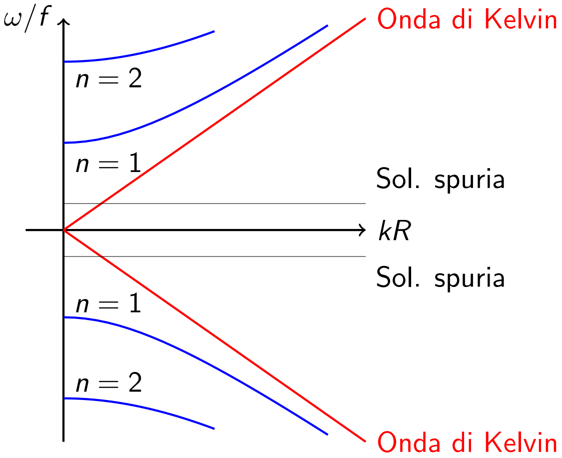
- Onde di Kelvin, con relazione di dispersione (38), che normalizzata dà:

$$\frac{\omega}{f} = \pm k\frac{C_0}{f} = \pm kR$$

  che è la retta a 45° nel piano.

Sommario

- Le precedenti relazioni possono essere riassunte nel grafico seguente:



Onde di Rossby

- Finora abbiamo studiato il caso di H_0 costante.
- Vediamo ora invece cosa accade quando andiamo a considerare onde lineari in uno strato fluido di larghezza L lungo y, ma in cui H_0 varia leggermente:

$$H_0 = D_0 \left(1 - \frac{sy}{L}\right) \tag{41}$$

  con $s \ll 1$, parametro che descrive la pendenza (**costante**) lungo y.
- In tal caso, le isobate (linee di livello di H_0) sono delle rette parallele all'asse x.
- In questo caso, una velocità parallela ad y si traduce in una variazione di vorticità, che è collegata alle variazioni di H_0.

Onde di Rossby

- Ritorniamo quindi all'equazione originale per η (14)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)-\nabla\cdot\left(C_0^2\nabla\eta\right)\right]-fgJ(H_0,\eta)=0 \qquad (42)$$

- Supposto il solito sviluppo per η nella forma:

$$\eta(x,y,t)=\Re\{\tilde{\eta}(y)e^{i(kx-\omega t)}\} \qquad (43)$$

- In queste condizioni, i vari termini che appaiono nella (42) diventano:

$$C_0^2=gD_0\left(1-\frac{sy}{L}\right)$$

$$\nabla\cdot(C_0^2\nabla\eta)=gD_0\left(1-\frac{sy}{L}\right)\nabla^2\eta+gD_0\left(-\frac{s}{L}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$J(H_0,\eta)=\frac{sD_0}{L}\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

Onde di Rossby

- L'equazione (42), diventa, scritta in termini di $\tilde{\eta}(y)$:

$$\left(1 - \frac{sy}{L}\right)\frac{d^2\tilde{\eta}}{dy^2} - \frac{s}{L}\frac{d\tilde{\eta}}{dy} + \tilde{\eta}\left[-k^2\left(1 - \frac{sy}{L}\right) - \frac{k}{\omega}\frac{fs}{L} + \frac{(\omega^2 - f^2)}{gD_0}\right] = 0 \tag{44}$$

- La condizione (24), per cui v' deve annullarsi a $y = 0$ e $y = L$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial t} - f\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

deve essere soddisfatta e, sostituendo lo sviluppo (43), abbiamo:

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dy} + \frac{fk}{\omega}\tilde{\eta} = 0 \qquad \text{a} \quad y = 0, \; y = L \tag{45}$$

Onde di Rossby

- Siccome $s \ll 1$ per ipotesi e $\frac{y}{L} \leq 1$, possiamo trascurare tutti i termini in cui $\frac{sy}{L}$ si confronta con 1 nella (44), e tenendo conto del fatto che:

$$C_0^2 = gH_0 = gD_0 \left(1 - \frac{sy}{L}\right) \sim gD_0$$

per cui possiamo sostituire gD_0 con C_0^2, ottenendo:

$$\frac{d^2\tilde{\eta}}{dy^2} - \frac{s}{L}\frac{d\tilde{\eta}}{dy} + \tilde{\eta}\left[\frac{(\omega^2 - f^2)}{C_0^2} - k^2 - \frac{k}{\omega}\frac{fs}{L}\right] = 0 \qquad (46)$$

- La soluzione di tale equazione è:

$$\tilde{\eta}(y) = e^{sy/(2L)}\left[A\sin(\alpha y) + B\cos(\alpha y)\right] \qquad (47)$$

dove:

$$\alpha^2 = \frac{(\omega^2 - f^2)}{C_0^2} - \left(k^2 + \frac{s^2}{4L^2}\right) - \frac{k}{\omega}\frac{fs}{L} \qquad (48)$$

Onde di Rossby

- Sostituendo la soluzione (47) nella condizione ai bordi (45), otteniamo che si hanno soluzioni non banali per A e B sse:

$$\frac{\sin(\alpha L)(\omega^2 - k^2 C_0^2)(\omega^2 - f^2)}{C_0^2 \omega^2} = 0 \tag{49}$$

  che è identica alla (33) ottenuta in precedenza, a meno del fatto che ora α è dato dalle (48).
- Questo implica che, in presenza di un fondo con una piccola pendenza, l'onda di Kelvin rimane inalterata!

Onde di Rossby

- La soluzione per l'onda di Poincaré, $\sin(\alpha L) = 0$, invece, si modifica secondo la relazione di dispersione seguente:

$$\omega^2 - \frac{k}{\omega} f\, C_0^2\, \frac{s}{L} = f^2 + C_0^2 \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right] \tag{50}$$

  che è l'equazione di una cubica (moltiplicando per ω!).
- Quindi tale relazione ha 3 soluzioni!
- Se ω è grande, poiché $s \ll 1$ il secondo termine si può trascurare rispetto al primo, cosicché:

$$\omega = \pm \sqrt{f^2 + C_0^2 \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]}$$

  cioè a frequenze alte riotteniamo le **onde di Poincaré**, che risultano quindi indipendenti dalla presenza della pendenza del fondo, supposta piccola.

Onde di Rossby

- Queste sono quindi due (quella col $+$, che si propaga nel senso positivo delle x e quella col -, che si propaga in verso opposto) soluzioni della cubica (50).
- Se consideriamo invece frequenze basse, dell'ordine di s:

$$\omega \sim s \ll 1$$

il primo termine nella (50) può essere trascurato rispetto al secondo, che è di ordine 1, e quindi si ottiene una soluzione del tipo:

$$\omega = -s \left(\frac{f}{L}\right) \frac{k}{k^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{f^2}{C_0^2}} \qquad n = 1, 2, \dots \tag{51}$$

- Queste onde, di cui la (51) rappresenta la relazione di dispersione, sono dette onde topografiche di Rossby o, semplicemente onde di Rossby.

Onde di Rossby

Notiamo un paio di aspetti notevoli di tali onde:

1. le frequenza di tali onde è sempre negativa, il che vuol dire che la velocità di fase lungo x:

$$C_x = \frac{\omega}{k} = -s\frac{f}{L}\frac{1}{k^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{f^2}{C_0^2}}$$

   è sempre negativa se $f > 0$, positiva se $f < 0$. Cioè le onde si propagano nel verso negativo delle x nell'emisfero nord, in quello positivo nell'emisfero sud!

2. la frequenza, in funzione di k, ha un minimo (o un max negativo!) se:

$$k_{\min} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{f^2}{C_0^2}}$$

   Il valore minimo di $\omega(k)$ corrispondente è:

$$\omega_{\min} = -\frac{sf}{2}\frac{1}{\sqrt{n^2\pi^2 + f^2L^2/C_0^2}}$$

Onde di Rossby

- In ogni caso, notiamo che, a differenza di quanto accade per le onde di Poincaré e di Kelvin, per le onde di Rossby si ha: $\omega < f$, cioé sono onde di bassa frequenza!
- Tenendo conto del fatto che il raggio di deformazione di Rossby è definito come:

$$R = C_0/f$$

abbiamo:

$$\frac{\omega}{f} = -s\left(\frac{R}{L}\right)\frac{kR}{1+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 R^2 + k^2R^2}$$

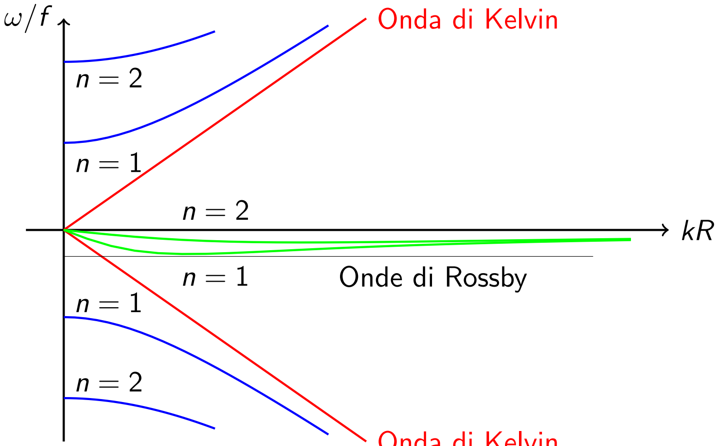
e:

$$\frac{\omega_{\min}}{f} = -\frac{s}{2}\frac{1}{\sqrt{n^2\pi^2 + L^2/R^2}}$$

- Notiamo infine che, all'aumentare di n, si ha che ω tende a zero, al contrario di quanto accade per le onde di Poincaré!

Onde di Rossby

- La relazione di dispersione per le onde nel caso con fondo variabile può essere quindi riassunta nel grafico seguente:



Onde di Rossby

- Nello stesso grado di approssimazione già visto, ($\omega \sim s$ e $s \ll 1$), possiamo infine ottenere l'espressione per la polarizzazione delle onde di Rossby:

$$\eta = \eta_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \cos(kx - \omega t + \phi) \tag{52}$$

$$u' = -\frac{g}{f}\frac{n\pi}{L}\eta_0 \cos\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \cos(kx - \omega t + \phi) \tag{53}$$

$$v' = -\frac{g}{f} k\eta_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \sin(kx - \omega t + \phi) \tag{54}$$

- Notiamo che queste relazioni, combinate insieme, ci dànno:

$$u' = -\frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{55}$$

$$v' = \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{56}$$

cioé, di nuovo, poiché abbiamo supposto $\omega/f \ll 1$ (che corrisponde a $Ro \ll 1$!), ritroviamo l'equilibrio geostrofico!

Onde di Rossby

- È evidente che in questo discorso c'è una contraddizione:
  1. da un lato, l'onda di Rossby appare in equilibrio geostrofico e questo implicherebbe che il campo di velocità segua le isobare del campo di pressione (ovvero di η!);
  2. d'altro lato, queste isobare, dato che tutto è invariante con z, essendo in un caso SW, devono terminare nelle isobate di H_0 che, come abbiamo visto, sono delle rette parallele all'asse x, ma questo implicherebbe che la velocità dovrebbe avere $v' = 0$, che contraddice la seconda delle (52).
- Vedremo tra poco come si risolve questo problema. Facciamo vedere prima, invece, come l'equazione per la perturbazione di η ottenuta dalle equazioni SW nel caso dell'onda di Rossby, si poteva ottenere anche direttamente dall'equazione della vorticità potenziale.
- Infatti, ritorniamo per un momento all'equazione (42) per η:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right) - \nabla \cdot (C_0^2 \nabla \eta)\right] - fgJ(H_0, \eta) = 0$$

Onde di Rossby

- Con le ipotesi:

$$H_0 = \left(1 - \frac{sy}{L}\right)$$

$$C_0^2 = gH_0 = gD_0 \left(1 - \frac{sy}{L}\right)$$

$$\nabla \cdot (C_0^2 \nabla \eta) = gH_0 \nabla^2 \eta - \frac{s}{L} gD_0 \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$J(H_0, \eta) = -\frac{dH_0}{dy} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

nelle condizioni dell'onda di Rossby:

$$s \sim \omega \ll 1; \qquad \frac{\omega}{f} \ll 1$$

si ottiene, notando che:

1. se: $\frac{\omega}{f} \ll 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \ll f^2 \eta \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right) \eta \sim f^2 \eta;$
2. se: $s \ll 1 \Rightarrow \nabla \cdot (C_0^2 \nabla \eta) \sim gH_0 \nabla^2 \eta$

Onde di Rossby

- Riunendo tutte queste ipotesi, troviamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(gH_0\nabla^2\eta - f^2\eta\right) - fg\frac{dH_0}{dy}\frac{\partial\eta}{\partial x} = 0 \tag{57}$$

- Usando le equazioni (55) e dividendo per fH_0, la (57) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta - \frac{f\eta}{H_0}\right) - \frac{f}{H_0}v'\frac{dH_0}{dy} = 0 \tag{58}$$

- Si può far vedere facilmente che la (58) non è altro che l'equazione per la vorticità potenziale:

$$\frac{d\Pi_s}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta + f}{H}\right) = 0 \tag{59}$$

Correzione della degenerazione geostrofica

- Ritorniamo al problema dell'incongruenza tra le relazioni di equilibrio geostrofico ottenute per l'onda di Rossby e le ipotesi iniziali fatte, per far vedere che l'equilibrio geostrofico ottenuto dipende in realtà dal fatto che le semplificazioni che abbiamo fatto sono effettivamente troppo brutali.
- Nota che il metodo che andremo ad esporre è del tutto generale e può essere applicato ad altri casi, anche, ad es., per trovare correzioni non-lineari ad ordini più alti nelle equazioni di partenza.
- Iniziamo dal supporre di adimensionalizzare tutte le variabili usando valori caratteristici opportunamente scelti:

$$
\begin{aligned}
x &= Lx' \qquad & y &= Ly' \\
t &= Tt' \\
u &= Uu' \qquad & v &= Uv' \\
\eta &= N_0\eta'
\end{aligned}
\tag{60}
$$

- Al solito, dividiamo H in un termine H_0 più una perturbazione η:

$$H(x, y, t) = H_0(x, y) + \eta(x, y, t) \tag{61}$$

  e poniamo:

$$H_0(x, y) = D - h_B(x, y)$$

  quindi consideriamo un caso con livello di fluido imperturbato costante D, meno il fondo $h_B(x, y)$.

- Ritornando alle equazioni SW (5) iniziali, sostituendo le variabili adimensionali, che, per comodità di notazione indichiamo nuovamente senza gli apici, abbiamo il set di equazioni seguente:

Correzione della degenerazione geostrofica

$$\epsilon\frac{\partial u}{\partial t}+\epsilon\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-v=-\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$\epsilon\frac{\partial v}{\partial t}+\epsilon\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u=-\frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (62)$$
$$\epsilon\frac{\partial \eta}{\partial t}+\epsilon^2\left(u\frac{\partial \eta}{\partial x}+v\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)-u\frac{\partial}{\partial x}\frac{h_B}{D}-v\frac{\partial}{\partial y}\frac{h_B}{D}+$$
$$+\epsilon\left[1+\epsilon\eta-\frac{h_B}{D}\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x}+DDYv\right) \quad (63)$$

- Se ipotizziamo uno sviluppo del tipo:

$$u=u_0+\epsilon u_1+\epsilon^2 u_2+\dots$$
$$v=v_0+\epsilon v_1+\epsilon^2 v_2+\dots \quad (64)$$
$$\eta=\eta_0+\epsilon\eta_1+\epsilon^2\eta_2+\dots$$
$$(65)$$

Correzione della degenerazione geostrofica

- Si vede che l'unico termine che sopravvive nelle (62) per $\epsilon = 0$ è la soluzione geostrofica:

$$u = -\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$u \frac{\partial}{\partial x} \frac{h_B}{D} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{h_B}{D} = 0$$

- Se invece facciamo l'ipotesi che $\frac{h_B}{D}$ sia piccolo ($h_B \propto s$ per le onde di Rossby!):

$$\frac{h_B}{D} \sim \epsilon \eta_B(x, y)$$

Correzione della degenerazione geostrofica

- Si ottiene quindi la correzione al moto geostrofico dalle equazioni:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - v_1 &= -\frac{\partial \eta_1}{\partial x} \\
\frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} u_1 &= -\frac{\partial \eta_1}{\partial y} \\
\frac{\partial \eta_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial y} - u_0 \frac{\partial \eta_B}{\partial x} - v_0 \frac{\partial \eta_B}{\partial y} + & \\
+ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) &= 0
\end{aligned}
$$