Dinamica dell'atmosfera
Instabilità barotropica

Leonardo Primavera

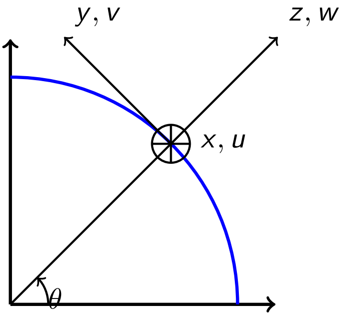
Dipartimento di Fisica
Università della Calabria

Instabilità barotropica

- Studiando le equazioni shallow-water (**SW**) nel caso di pura rotazione abbiamo visto vari casi di onde che possono manifestarsi in differenti situazioni (onde di Poicaré, Kelvin, Rossby, ecc.).
- Tali onde, sotto opportune condizioni, quando si propagano su una struttura di equilibrio instabile possono essere soggette ad instabilità, cioè possono passare dall'avere ampiezza piccolissima ad avere ampiezze dello stesso ordine di grandezza di quelle della struttura di equilibrio, alterando tale struttura ed, eventualmente, in taluni casi, provocare una transizione alla turbolenza.
- Un esempio tipico è quello dei flussi disomogenei (**shear flows**).

Shear flows

- Consideriamo qui il caso di una atmosfera barotropica, quindi **NON stratificata** ($\nabla\rho \times \nabla p = 0$ perché sia $\nabla\rho$ che ∇p sono nulli!).
- In questo caso l'instabilità è prodotta dalla variazione del parametro di Coriolis con la latitudine.
- Consideriamo un **sistema cartesiano locale** come visto in precedenza:



Il parametro di Coriolis f è definito come:

$$f = 2\Omega \sin\theta$$

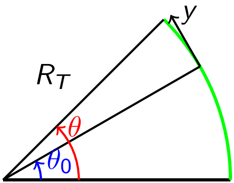
Nel caso delle equazioni SW finora abbiamo usato: $f = 2\Omega =$ costante, che corrisponde a supporre $\theta = \pi/2$ (polo!).

Shear flows

- Se invece ci mettiamo ad una latitudine qualsiasi θ_0 possiamo tener conto della variabilità di θ supponendo spostamenti piccoli rispetto al raggio terrestre, per cui, sviluppando in serie di Taylor, otteniamo:

$$f = 2\Omega \sin\theta \sim 2\Omega \sin\left(\theta_0 + \frac{y}{R_T}\right)$$

dove R_T è il raggio terrestre e y/R_T è approssimativamente l'arco corrispondente alla differenza $R_T(\theta - \theta_0)$.



β-plane

- Poiché $y \gg R_T$, lo sviluppo di Taylor al primo ordine ci dà:

$$f \sim 2\Omega \left[\sin\theta_0 + \left.\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0) \right] = (f_0 + \beta_0 y)$$

dove:

$$f_0 = 2\Omega \sin\theta_0; \qquad \beta_0 = \frac{2\Omega}{R_T}\cos\theta_0$$

- Valori tipici a medie latitudini, sono:

$$f_0 = 8 \times 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}; \quad \beta_0 = 2 \times 10^{-11}\mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}^{-1}$$

- Questo sistema, in cui le lunghezze latitudinali sono piccole rispetto a R_T, ma non trascurabili, è detto β-plane.

Instabilità barotropica

- Scriviamo quindi le equazioni fluide nel β-plane, sotto le ulteriori ipotesi che:
    1. fluido incomprimibile, omogeneo e ideale ($\nu = 0$);
    2. sistema cartesiano in rotazione con velocità angolare $\vec{\Omega}$;
    3. fluido non stratificato $\Rightarrow$ **barotropico**

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + fu &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
$$

Instabilità barotropica

- Facciamo l'ulteriore ipotesi che il numero di Rossby sia piccolo:

$$Ro \ll 1$$

così da poter trascurare le variazioni in z ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$) e la velocità lungo z (moto bi-dimensionale).

- Sotto queste ipotesi avremo:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0
\end{gathered} \tag{1}$$

Instabilità barotropica

- Supponiamo che il campo di velocità all'equilibrio sia disomogeneo, dipendente dalla coordinata y e diretto lungo x:

$$u = \bar{u}(y); \quad v = 0$$

  e da una pressione $\bar{p}$.
- Il campo di equilibrio deve soddisfare le equazioni (1), in particolare, dalla (1.2) si ha:

$$f\,\bar{u}(y) = (f_0 + \beta_0 y)\bar{u}(y) = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}$$

  che implica che la pressione di equilibrio deve essere a sua volta una funzione della sola y: $\bar{p} = \bar{p}(y)$.

Onde lineari

- Consideriamo ora delle piccole perturbazioni sovrapposte alla soluzione:

$$
\begin{aligned}
u &= \bar{u}(y) + \epsilon u'(x, y, t) \\
v &= \epsilon v'(x, y, t) \\
p &= \bar{p}(y) + \epsilon p'(x, y, t)
\end{aligned}
$$

  con $\epsilon \ll 1$.
- Sostituendo queste relazioni nelle (1) e linearizzando (cioé tenendo solo i termini di ordine ϵ):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u}(y)\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{d\bar{u}(y)}{dy} - (f_0 + \beta_0 y)v' &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} \\
\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u}(y)\frac{\partial v'}{\partial x} + (f_0 + \beta_0 y)u' &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y} \qquad (2) \\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0
\end{aligned}
$$

Funzione di flusso

- Siccome u' e v' dipendono solo da x, y e t e $\nabla \cdot \vec{u}' = 0$, possiamo scrivere $\vec{u}'$ come il rotore di una funzione di flusso $\psi(x, y, t)\hat{\mathbf{e}}_z$:

$$\vec{u}' = \nabla \times (\psi \hat{\mathbf{e}}_z) = \frac{\partial \psi}{\partial y}\hat{\mathbf{e}}_x - \frac{\partial \psi}{\partial x}\hat{\mathbf{e}}_y$$

da cui:

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- Sostituendo questi valori nelle (2), derivando la prima equazione lungo y e la seconda lungo x, quindi sottraendo la seconda dalla prima, il termine di pressione scompare e si ottiene l'unica equazione nella incognita ψ:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}(y)\frac{\partial}{\partial x}\right]\nabla^2\psi + \left[\beta_0 - \frac{d^2\bar{u}(y)}{dy^2}\right]\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

Funzione di flusso

- Nota che tale equazione è a coefficienti **NON** costanti!
- Ipotizziamo che la soluzione sia **periodica** in x, ma le condizioni al bordo in y siano generiche:

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) e^{i(kx - \omega t)}$$

- Con questa ipotesi si ottiene una equazione per l'ampiezza complessa $\phi(y)$:

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi + \frac{\beta_0 - d^2\bar{u}/dy^2}{\bar{u} - c}\phi = 0 \tag{4}$$

dove si è posto: $c = \omega/k$ è la velocità di fase.

Equazione agli autovalori

- Questa equazione è una equazione agli autovalori per ϕ (**perché** c **NON è nota a priori!**), chiamata equazione di Rayleigh.
- Per poter proseguire occorre specificare delle condizioni al bordo in y.
- L'ipotesi più semplice che possiamo fare è supporre la presenza di muri impenetrabili a $y = 0$ e $y = L$.
- In questo caso, la velocità in y deve annullarsi a $y = 0$ e $y = L$:

$$v'(y = 0) = v'(y = L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(y = 0) = \phi(y = L) = 0$$

Equazione agli autovalori

- L'equazione (4) è una equazione agli autovalori nel senso che $\phi \neq 0$ sse c assume specifici valori che forniscono delle ϕ non nulle.
- Notiamo che ϕ e c sono complessi, mentre tutte le altre quantità sono reali, quindi anche c^* è un autovalore per ϕ^*, quindi gli autovalori sono complessi coniugati.
- Ponendo: $c = c_R + ic_I$, avremo:

$$\psi(x, y, t) = \phi(y)e^{i(kx-ckt)} = \phi(y)e^{ik(x-c_R t)}e^{\mp kc_I t}$$

  cioè la soluzione ha una parte oscillante e una esponenzialmente crescente o decrescente.
- Il prodotto kc_I mi dice quanto cresce rapidamente l'ampiezza ϕ nel tempo, cioé il tasso di crescita (growth-rate) dell'instabilità.

Criterio di instabilità

- Determinare c per un profilo generico di $\bar{u}(y)$ è difficile.
- Possiamo tuttavia cercare un criterio generale che ci dica sotto quali condizioni si può avere instabilità.
- Moltiplicando la (4) per ϕ^* e integrando tra 0 ed L, si ottiene:

$$-\int_0^L \left(\left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + k^2 |\phi|^2 \right) dy + \int_0^L \frac{\beta_0 - d^2\bar{u}/dy^2}{\bar{u} - c} |\phi|^2 dy = 0$$

- Il primo integrale è sicuramente reale, nel secondo c è complesso, ma le altre quantità sono reali.
- Dividendo c nella sua parte reale e immaginaria, come fatto in precedenza, troviamo per la parte immaginaria dell'equazione che:

$$c_I \int_0^L \frac{\beta_0 - d^2\bar{u}/dy^2}{(\bar{u} - c_R)^2 + c_I^2} |\phi|^2 dy = 0$$

che può essere soddisfatta se $c_I = 0$ (che però significa che non si ha instabilità!), ovvero se l'integrale è nullo.

Criterio di instabilità

- Una condizione necessaria (ma NON sufficiente!) perché questo accada è che la funzione:

$$\beta_0 - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(f_0 + \beta_0 y - \frac{d\bar{u}(y)}{dy} \right)$$

  si annulli almeno una volta all'interno del dominio.
- Nota che il termine a destra non è altro che la vorticità della soluzione di equilibrio, quindi una condizione necessaria per l'instabilità è che la vorticità del campo di equilibrio abbia almeno un massimo o un minimo.

Condizioni sul growth-rate

- Vogliamo ora vedere se è possibile dare una stima massima o minima del tasso di crescita. E' semplice fare il calcolo per $\beta_0 = 0$. Daremo alla fine il risultato per $\beta_0 \neq 0$.
- Supponiamo quindi $\beta_0 = 0$. In un approccio Lagrangiano, lo spostamento in y di una particella fluida sia d, che ci dà, per definizione:
$$v = \frac{\partial d}{\partial t} + u\frac{\partial d}{\partial x} + v\frac{\partial d}{\partial y}$$
la quale, per perturbazioni d piccole, poiché:
$$\begin{aligned} u &= \bar{u}(y) + \epsilon u' \\ v &= \epsilon v' \end{aligned}$$
diventa:
$$v = \frac{\partial d}{\partial t} + u\frac{\partial d}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (5)$$

Condizioni sul growth-rate

- Supposto:

$$\psi = \phi(y)e^{i(kx-\omega t)}$$
$$d = a(y)e^{i(kx-\omega t)}$$

dalla (5) troviamo:

$$\phi = (\bar{u} - c)a \tag{6}$$

- Dalle condizioni al bordo per $\phi(y)$ si ottiene che:

$$a(y=0) = a(y=L) = 0$$

- Sostituendo la relazione (6) nella (4) si ha:

$$\frac{d}{dy}\left[(\bar{u}(y) - c)^2 \frac{da}{dy}\right] - k^2(\bar{u}(y) - c)^2 a = 0$$

che è una equazione per a.

Condizioni sul growth-rate

- Moltiplicando per a^* e integrando, otteniamo una equazione complessa in cui la parte reale è:

$$\int_0^L [(\bar{u}(y) - c_R)^2 - c_I^2] P dy = 0 \tag{7}$$

e la parte immaginaria:

$$\int_0^L (\bar{u}(y) - c_R) P dy = 0 \tag{8}$$

dove:

$$P = \left| \frac{da}{dy} \right|^2 + k^2 a^2 \geq 0$$

- Se la parte immaginaria deve annullarsi, significa che $(\bar{u}(y) - c_R)$ dev'essere nullo in qualche punto del dominio, cioé deve aversi un punto y_0 per cui $\bar{u}(y)|_{y=y_0} = c_R$, cioé una risonanza, per poter avere instabilità!

Condizioni sul growth-rate

- Se poniamo: U_{min} e U_{max}, rispettivamente, come i valori minimo e massimo di $\bar{u}(y)$, dovremo quindi avere che:

$$U_{min} < c_R < U_{max}$$

  cioè abbiamo dei limiti sulla frequenza.

- Per trovare dei limiti sul tasso di crescita, invece, ricordando che P è una quantità definita positiva, certamente:

$$\int_0^L [\bar{u}(y) - U_{min}][U_{max} - \bar{u}(y)] P dy \geq 0$$

  che, sommando con la (7) e sottraendo la (8) moltiplicata per $(U_{min} + U_{max} - 2c_R)$ ci dà la relazione:

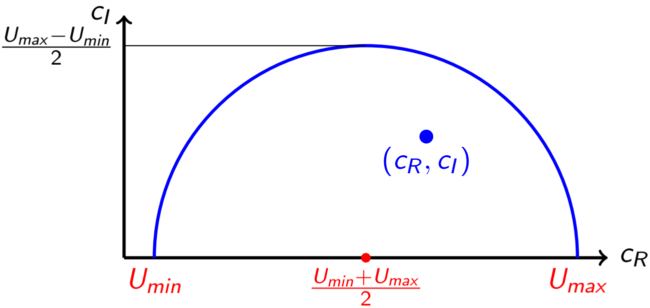
$$\left[\left(c_r - \frac{U_{min} + U_{max}}{2} \right)^2 + c_I^2 - \left(\frac{U_{max} - U_{min}}{2} \right)^2 \right] \int_0^L P dy \leq 0$$

Condizioni sul growth-rate

- Poiché l'integrale è sempre positivo, la quantità tra parentesi dev'essere negativa, cioè:

$$\left(c_r - \frac{U_{min} + U_{max}}{2}\right)^2 + c_I^2 \leq -\left(\frac{U_{max} - U_{min}}{2}\right)^2$$

il che implica che il punto del piano complesso (c_R, c_I) sta nel cerchio di centro: $\frac{U_{min}+U_{max}}{2}$ e raggio: $\frac{U_{max}-U_{min}}{2}$



Condizioni sul growth-rate

- Il fatto rilevante è che:

$$c_I \leq \frac{U_{max} - U_{min}}{2}$$

che ci fornisce un estremo superiore per il tasso di crescita!

- Nel caso $\beta_0 \neq 0$ i calcoli sono più difficili e dànno:

$$U_{min} - \frac{\beta_0 L^2}{2(\pi^2 + k^2 L^2)} \leq c_R \leq U_{max}$$

$$\left(c_R - \frac{U_{min} + U_{max}}{2} \right)^2 + c_I^2 \leq \left(\frac{U_{max} - U_{min}}{2} \right)^2 + \frac{\beta_0 L^2 (U_{max} - U_{min})}{2(\pi^2 + k^2 L^2)}$$