# Dinamica dell'atmosfera
# Flussi geostrofici

Leonardo Primavera

Dipartimento di Fisica
Università della Calabria

# Equazioni fluide semplificate

- Consideriamo il set di equazioni fluide semplificate appena ottenuto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + fu &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g
\end{aligned} \tag{1}$$

- Andiamo ora a studiare il caso, particolarmente importante, in cui il termine di Coriolis domina il moto del fluido, e i termini viscosi siano trascurabili, ossia:

$$Ro_T \ll 1; \qquad Ro \ll 1; \qquad Ek \ll 1$$

# Equazioni del moto geostrofico

- I termini di trasporto nelle equazioni si possono trascurare rispetto al termine di Coriolis, ottenendo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$-fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2}$$

$$+fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

- Si può far vedere che tale flusso gode delle notevoli proprietà seguenti:

# Proprietà del moto geostrofico

1. prendendo le derivate rispetto a $z$ della seconda e terza equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

2. dalle stesse equazioni si ha che:

$$u = -\frac{1}{\rho_0 f}\frac{\partial p}{\partial y}; \qquad v = +\frac{1}{\rho_0 f}\frac{\partial p}{\partial x}$$

   che implica che: $\vec{u} \perp \nabla p$, il che implica che il moto avviene lungo le isobare del fluido;

3. prendendo le derivate lungo $x$ e $y$ di $u$ e $v$ si ottiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

   cioè la componente ortogonale della velocità è sempre costante lungo la verticale, come le altre componenti.

# Flusso geostrofico

- Un moto di questo tipo viene chiamato flusso geostrofico (dal greco, *rotazione della Terra*).
- Si noti come la perpendicolarità tra la forza (gradiente di pressione) e la velocità nel sistema relativo era stata già evidenziata per altro verso quando abbiamo studiato la trasformazione della accelerazione tra il sistema inerziale e quello relativo!

# Dinamica della vorticità

- Una variabile fondamentale in GFD è la vorticità:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$$

- Nota che la presenza di vorticità **NON** è equivalente alla presenza di moti vorticosi! Ad es., una velocità $v(x)$ produce una $\omega_z \neq 0$, ma non **moti vorticosi**!
- Per un moto rigido:

$$\vec{u} = \vec{\Omega}_0 \times \vec{r}$$

si ha: $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}_0$.

# Vorticità nel caso atmosferico

- Poiché sappiamo che, per il fluido atmosferico:

$$\vec{u}_I = \vec{u} + \Omega \times \vec{r}$$

- Prendendo il rotore:

$$\vec{\omega}_I = \underbrace{\vec{\omega}}_{\text{vorticità relativa}} + \underbrace{2\Omega}_{\text{vorticità planetaria}} \tag{4}$$

- Dalle relazioni di scaling usate in precedenza si ottiene:

$$\omega_x \sim \omega_y \sim U/H \gg \omega_z \sim U/L$$

- Invece, il rapporto tra i due termini scala come:

$$\frac{|\vec{\omega}|}{|2\vec{\Omega}|} \sim \frac{U}{H\Omega}$$

che è il Numero di Rossby costruito con la velocità orizzontale, ma la scala verticale, che quindi è abbastanza più grande di quello classico: $Ro = U/(L\Omega)$.

# Dinamica della vorticità

- Poiché il rotore di un gradiente è sempre nullo, abbiamo:

$$\nabla \cdot \vec{\omega}_I = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{\omega} = 0$$

  cioé la vorticità è sempre solenoidale!

- Definiamo linea vorticosa (vortex line) o filamento vorticoso (vortex filament) una linea nel fluido tale che in ogni punto la $\vec{\omega}$ è tangente ad essa, cioé:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

  è l'equazione della linea vorticosa in un punto.

- Data una linea chiusa $\gamma$ nel fluido, chiamiamo tubo vorticoso (vortex tube) la superficie formata da tutte le linee vorticose che passano per i punti di $\gamma$ ad un dato istante di tempo.

# Intensità vorticosa

- Consideriamo ad un dato istante un tubo vorticoso delimitato da 2 superfici $S$ ed $S'$ di contorni $\gamma$ e $\gamma'$.
- Possiamo far vedere che:

$$\int_S \vec{\omega} \cdot \hat{n} dS = \int_{S'} \vec{\omega} \cdot \hat{n}' dS' \tag{5}$$

- Definiamo la quantià:

$$\Gamma = \int_S \vec{\omega} \cdot \hat{n} dS$$

  intensità del tubo vorticoso (strength of vortex tube), che rappresenta una sorta di portata del tubo vorticoso.
- La relazione (5) ci dice quindi che $\Gamma$ risulta costante, ad un dato istante, lungo l'intero tubo vorticoso!

# Evoluzione della intensità vorticosa

- Dalla relazione (4), si ha:

$$\Gamma_I = \Gamma + 2\Omega A_n$$

  cioé l'intensità nel sistema inerziale e quella nel sistema in rotazione differiscono solo per un termine che dipende da quante linee di vorticità planetaria sono tagliate dalla sezione del tubo vorticoso.
- Di fatto, per il teorema di Stokes:

$$\Gamma = \int_S \vec{\omega} \cdot \hat{n} dS = \oint_\gamma \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

  è la circuitazione (o circolazione) della velocità!
- Nota come, attraverso $\Gamma$, stiamo dando una misura scalare di una quantità vettoriale ($\vec{\omega}$).

# Equazione dell'intensità vorticosa

- Consideriamo ora una **curva materiale** del fluido, cioé una curva costituita sempre dagli stessi elementi fluidi durante il moto, ovvero una curva co-movente col fluido:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_\gamma \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_\gamma \vec{u} \cdot \frac{d}{dt}(d\vec{r}) = \oint_\gamma \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

- Utilizzando l'equazione del momento:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\Phi_{\text{eff}} + \frac{\mu}{\rho}\vec{\mathcal{F}} - 2\vec{\Omega} \times \vec{u}$$

- avremo:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \underbrace{-2\oint_\gamma (\vec{\Omega} \times \vec{u}) \cdot d\vec{r}}_{(1)} - \underbrace{\oint_\gamma \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r}}_{(2)} + \underbrace{\mu \oint_\gamma \frac{\vec{\mathcal{F}}}{\rho}}_{(3)}$$

- perchè $\oint_\gamma \nabla \Phi_{\text{eff}} \cdot d\vec{r} = 0$ perché è un differenziale esatto calcolato lungo una curva chiusa!
- Trasformando opportunamente i termini (1) e (2):

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \underbrace{-2 \oint_\gamma \vec{\Omega} \cdot \frac{dS}{dt} \hat{n}}_{(1)} - \underbrace{\int_S \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} dS}_{(2)} + \underbrace{\mu \oint_\gamma \frac{\vec{\mathcal{F}}}{\rho}}_{(3)}$$

- Derivando la relazione: $\Gamma_I = \Gamma + 2\Omega A_n$ troviamo infine:

$$\frac{d\Gamma_I}{dt} = \int_S \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} dS + \mu \oint_\gamma \frac{\vec{\mathcal{F}}}{\rho}$$

# Fluidi barotropici e baroclinici

- Un fluido per cui:
$$\nabla p \,//\, \nabla \rho$$
  si dice fluido barotropico
- In caso contrario, si dice fluido baroclinico
- Per un fluido barotropico il termine (2) si annulla identicamente!
- Ad esempio, l'atmosfera imperturbata è barotropica!

# Teorema di Kelvin

- Per un fluido barotropico e ideale:

$$\frac{d\Gamma_I}{dt} = 0$$

- cioé i tubi vorticosi nel sistema inerziale si muovono insieme al fluido, cioè $\Gamma_I$ si comporta come uno scalare passivo, cioé una quantità trasportata dal fluido (si mantiene costante lungo le linee di flusso del fluido!).
- È questo il Teorema di Kelvin.

# Equazione della vorticità

- La circolazione, come abbiamo visto, è una misura scalare della vorticità.
- Tuttavia è opportuno anche studiare come evolve il **vettore vorticità**.
- Dalla identità vettoriale:

$$\vec{\omega} \times \vec{u} = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} - \frac{1}{2}\nabla|\vec{u}|^2$$

  e, prendendo il rotore di questa equazione:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times [(2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \times \vec{u}] = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left( \frac{\vec{\mathcal{F}}}{\rho} \right)$$

# Equazione della vorticità

- Dalla relazione:

$$\nabla \times [(2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \times \vec{u}] = (\vec{u} \cdot \nabla)(2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) + (\nabla \cdot \vec{u})(2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) + \\ - [\nabla \cdot (2\vec{\Omega} + \vec{\omega})]\vec{u} - [(2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \cdot \nabla]\vec{u}$$

  tenendo conto del fatto che:

  1. $(\vec{u} \cdot \nabla)(2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) = 0$, perché: $\vec{\Omega}$ è costante;
  2. $[\nabla \cdot (2\vec{\Omega} + \vec{\omega})]\vec{u} = 0$, perché: $\nabla \cdot \vec{\omega}_I = 0$,

# Equazione per la vorticità

- si ha:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\vec{\omega}_I(\nabla \cdot \vec{u}) + (\vec{\omega}_I \cdot \nabla)\vec{u} + \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left(\frac{\vec{\mathcal{F}}}{\rho}\right) \tag{6}$$

- Per il penultimo e ultimo termine, abbiamo già visto come agiscono per $\Gamma$.
- Viceversa, il primo e secondo termine a secondo membro, combinati insieme, fanno variare la vorticità per l'effetto del *vortex-tube stretching* e *vortex-tube tilt*

# Vorticità potenziale

- Dalla (6), introducendo l'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \tag{7}$$

dividendo la (6) per $\rho$ e usando la (7) si ha:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\vec{\omega}_I\right) = \left(\frac{\vec{\omega}_I}{\rho}\cdot\nabla\right)\vec{u} + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3} + \frac{1}{\rho}\nabla\times\left(\frac{\vec{\mathcal{F}}}{\rho}\right) \tag{8}$$

# Vorticità potenziale

- Supponiamo ora che $\lambda$ sia uno scalare passivo, cioé una quantità che si conserva lungo le linee di flusso del fluido (quindi sia trasportata dal campo di velocità):

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\lambda = 0$$

- Dato che, per un vettore generico $\vec{A}$ si ha:

$$\vec{A} \cdot \frac{d\nabla\lambda}{dt} = (\vec{A} \cdot \nabla)\frac{d\lambda}{dt} - \left[(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{u}\right] \cdot \nabla\lambda$$

usando questa relazione per $\vec{A} = \vec{\omega}_I/\rho$ e la (8) moltiplicata scalarmente per $\nabla\lambda$, si ha:

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla\lambda \cdot \frac{\vec{\omega}_I}{\rho}\right) = \nabla\lambda \cdot \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^3} + \nabla\lambda \cdot \left[\frac{1}{\rho}\nabla \times \left(\frac{\vec{\mathcal{F}}}{\rho}\right)\right]$$

# Vorticità potenziale

- Ora, se:
  1. la viscosità del fluido è trascurabile: $\vec{\mathcal{F}} = 0$;
  2. il fluido è barotropico, oppure se
  3. $\lambda = \lambda(\rho, p)$, ad esempio $\lambda = T$, la temperatura, ovvero qualsiasi altra variabile termodinamica,

  allora, la quantità scalare:

$$\Pi = \frac{\vec{\omega}_I}{\rho} \cdot \nabla\lambda = \frac{\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}}{\rho} \cdot \nabla\lambda$$

  è detta vorticità potenziale ed è anch'essa conservata lungo le linee di flusso del fluido:

$$\frac{d\Pi}{dt} = 0$$

# Teorema di Taylor-Proudman

- Ritornando ora alla (6):

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\vec{\omega}_I(\nabla \cdot \vec{u}) + (\vec{\omega}_I \cdot \nabla)\vec{u} + \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left(\frac{\vec{\mathcal{F}}}{\rho}\right)$$

nel caso in cui:

1. fluido barotropico;
2. viscosità trascurabile ($Ek \ll 1$);
3. approssimazione di Boussinesq,

si ha:

$$\frac{d\vec{\omega}_I}{dt} = (\vec{\omega}_I \cdot \nabla)\vec{u}$$

- Notando che:

$$\frac{d\vec{\omega}_I}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

perché $\vec{\Omega} =$ costante

# Teorema di Taylor-Proudman

- Si ha quindi:

$$\underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{(1)} = \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u}}_{(2)} + \underbrace{2(\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{u}}_{(3)}$$

- Possiamo far vedere che: (1), (2) $\ll$ (3) quando $Ro \ll 1$, da cui si ottiene:

$$(\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{u} = 0$$

  che è il Teorema di Taylor-Proudman!

- Il teorema ci dice che le componenti del campo di velocità non variano nella direzione di $\vec{\Omega}$.

# Teorema di Taylor-Proudman

- Se: $\vec{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{k}}$, questo corrisponde a:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

  come trovato in precedenza!
- Notiamo che:
  1. questa formula è più generale (non dipende dalla geometria o dal fatto che il fluido ha uno spessore molto più piccolo nella direzione verticale);
  2. l'asse $z$ in questo sistema non coincide con quello del sistema **locale** che abbiamo considerato prima, in cui $\vec{\Omega}$ formava un angolo rispetto all'asse $z$.

# Teorema di Taylor-Proudman

- Il teorema sostanzialmente afferma, come già visto, che **il moto è bi-dimensionale** e i moti di fluido avvengono come **in colonne** (dette colonne di Taylor) e se si ha una perturbazione in un punto della colonna, dovrà aversi la stessa perturbazione a tutte le altezze.
- Taylor mostrò sperimentalmente come in un fluido contenuto in un recipiente cilindrico posto in rotazione, se ad una data altezza si inserisce un corpo spinto in direzione radiale, esso crea intorno a sè una deformazione delle linee di flusso del fluido. La stessa deformazione si osserverà anche alle altre altezze, come se un oggetto **fantasma** identico al precedente attraversasse il fluido alle varie altezze!

# Flusso geostrofico

- Ritorniamo ora alla equazione per la velocità:

$$\underbrace{\frac{d\vec{u}}{dt}}_{(1)} + \underbrace{2\vec{\Omega} \times \vec{u}}_{(2)} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\nabla p}_{(3)} + \underbrace{\nabla\Phi}_{(4)} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\vec{\mathcal{F}}}_{(5)}$$

- Se, di nuovo, non distinguiamo tra le componenti orizzontali e verticali, si ha che:

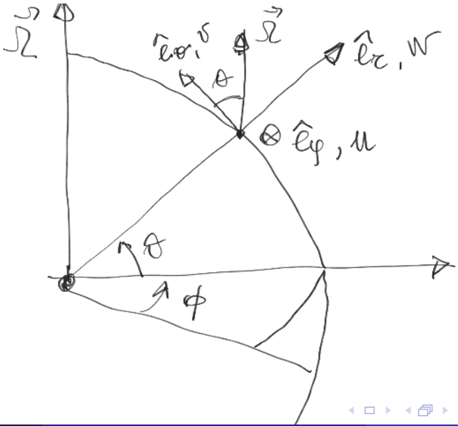
$$\frac{(1)}{(2)} \sim Ro \ll 1 \qquad \frac{(5)}{(2)} \sim Ek \ll 1$$

- In queste condizioni, avremo:

$$2\rho\vec{\Omega} \times \vec{u} = -\nabla p + \rho\nabla\Phi$$

# Flusso geostrofico

- In un sistema di coordinate sferiche *non-locale*, tenendo conto che:
  1. $\rho \nabla \Phi = -\rho g \hat{\mathbf{e}}_r$
  2. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi$
  3. $\vec{\Omega} = \Omega \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + \Omega \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_r$



# Flusso geostrofico

- In queste condizioni, si ha:

$$-2\rho u\Omega\cos\theta = -\frac{\partial p}{\partial r} - \rho g$$
$$2\rho u\Omega\sin\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$
$$2\rho(w\Omega\cos\theta - v\Omega\sin\theta) = -\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}$$

- Supposto che:

$$p = p_0(r) + p'(r,\theta,\phi)$$
$$\rho = \rho_0(r) + \rho'(r,\theta,\phi)$$

e che $p_0$ e $\rho_0$ soddisfino l'equazione di bilancio di pressione verticale:

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = -\rho_0 g$$

# Flusso geostrofico

- Otteniamo:

$$-2(\rho_0 + \rho')u\Omega\cos\theta = -\frac{\partial p'}{\partial r} - \rho' g$$

$$2(\rho_0 + \rho')u\Omega\sin\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial\theta}$$

$$2(\rho_0 + \rho')(w\Omega\cos\theta - v\Omega\sin\theta) = -\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial p'}{\partial\phi}$$

che sono le equazioni del moto geostrofico, in una forma più generale delle precedenti!

- Se poi poniamo:

$$z = r - r_E \quad \leftarrow \quad r_E = \text{raggio terrestre, con } z \ll r_E$$

$$\rho' \ll \rho_0$$

$$w \ll u,\ v$$

$$f = 2\Omega\sin\theta \quad \rightarrow \text{parametro di Coriolis}$$

# Flusso geostrofico

- otteniamo:

$$
\begin{aligned}
-2\rho_0 u\Omega\cos\theta &= -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g \\
2\rho_0 u\Omega\sin\theta &= -\frac{1}{r_E}\frac{\partial p'}{\partial \theta} \\
-2\rho_0 v\Omega\sin\theta &= -\frac{1}{r_E\cos\theta}\frac{\partial p'}{\partial \phi}
\end{aligned}
$$

- Semplificando ulteriormente il primo termine per lo scaling di $p'$:

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g \\
fu &= -\frac{1}{\rho_0 r_E}\frac{\partial p'}{\partial \theta} \\
fv &= -\frac{1}{\rho_0 r_E\cos\theta}\frac{\partial p'}{\partial \phi}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

# Flusso geostrofico

- che sono le analoghe delle equazioni (2) quando si consideri: $r_E d\theta \to y$, $r_E \cos\theta d\phi \to x$.
- Se poniamo: $\vec{u}_H = v\hat{\mathbf{e}}_\theta + \vec{u}\hat{\mathbf{e}}_\phi \quad \leftarrow$ velocità orizzontale, si ha:

$$\vec{u}_H = \frac{\hat{\mathbf{e}}_r \times \nabla p}{f\rho_0}$$

che ci dice che $\vec{u}_H \perp \nabla p$ e quindi parallelo alle isobare, come già trovato in precedenza.

# Flusso geostrofico

- Nota che:
  - dove $f = 2\Omega \sin\theta > 0$ (**emisfero nord**, $0 \leq \theta \leq \pi/2$) il moto delle particelle fluide lungo le isobare avviene circoscrivendo le zone a pressione più alta **in senso anti-orario**;
  - dove $f = 2\Omega \sin\theta < 0$ (**emisfero sud**, $0 \geq \theta \geq -\pi/2$) il moto delle particelle fluide lungo le isobare avviene circoscrivendo le zone a pressione più alta **in senso orario**;

# Vento termico

- Se prendiamo la derivata lunzo $z$ della (9.2) e (9.3), tenendo conto del fatto che $f$ non dipende da $z$, si ha:

$$
\begin{aligned}
f\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{r_E\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial p'}{\partial\theta} - \frac{1}{r_E}\frac{\partial p'}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\\
f\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{r_E\rho_0\cos\theta}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial p'}{\partial\phi} + \frac{1}{r_E\cos\theta}\frac{\partial p'}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)
\end{aligned}
$$

- Dividendo per $f$ e tenendo conto della (9.1), si trova:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{fr_E}\left[-\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial\theta} - \frac{\partial p'}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\right]\\
\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{fr_E\cos\theta}\left[-\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial\phi} + \frac{\partial p'}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\right]
\end{aligned}
$$

# Vento termico

- Se ora consideriamo delle superfici di equazione: $z = z(\theta, \phi)$ tali che $p'$ sia costante su di esse, allora:

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial \theta}\right)_{p'=\text{cost.}} = \left(\frac{\partial p'}{\partial \phi}\right)_{p'=\text{cost.}} = 0$$

- Le equazioni diventano perciò:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{p'=\text{cost.}} = \frac{g}{f r_E \rho_0}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial \theta}\right)_{p'=\text{cost.}}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{p'=\text{cost.}} = -\frac{g}{f r_E \cos\theta \rho_0}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial \phi}\right)_{p'=\text{cost.}}$$

da cui troviamo:

$$\left(\frac{\partial \vec{u}_H}{\partial z}\right)_{p'=\text{cost.}} = -\frac{g}{f \rho_0}\hat{\mathbf{e}}_r \times \left(\nabla \rho'\right)_{p'=\text{cost.}}$$

# Vento termico

- Dalla equazione di stato: $p' = \rho' \tilde{R} T$ e sulle superfici a $p'$ costante:

$$\left(\nabla \rho'\right)_{p'=\text{cost.}} = -\frac{\rho'}{T} \left(\nabla T\right)_{p'=\text{cost.}}$$

che ci dà:

$$\left(\frac{\partial \vec{u}_H}{\partial z}\right)_{p'=\text{cost.}} = \frac{g \rho'}{f \rho_0 T} \hat{\mathbf{e}}_r \times \left(\nabla T\right)_{p'=\text{cost.}} \tag{10}$$

- Questo effetto, per cui la velocità orizzontale può variare con l'altezza a causa di gradienti di temperatura (o di densità) orizzontali è detto vento termico.

# Vento termico

- Per un fluido barotropico: $\nabla p' = \nabla \rho' = 0$, e quindi la $\vec{u}_H$ **non dipende da** $z$, come già trovato.
- Se questo **non** si verifica (cioé se il fluido è baroclinico), le ipotesi del teorema di Taylor-Proudman sono violate e la $\vec{u}_H$ varia con l'altezza $z$ secondo la (10).