Dinamica dell'atmosfera
Equazioni fluide e parametri fondamentali

Leonardo Primavera

Dipartimento di Fisica
Università della Calabria

Rappresentazione di un fluido

- Approccio Euleriano e Lagrangiano alla descrizione di un fluido
- Scegliamo l'approccio Euleriano e otteniamo le equazioni che ci servono per descrivere il moto di un fluido in maniera **euristica**
- Supponiamo di avere una certa quantità (scalare o vettoriale) $\mathcal{Q}$ che rappresenti la **densità** di un generico campo $f(x, y, z, t)$:

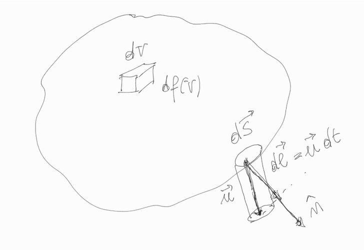
$$\mathcal{Q} = \frac{df}{dV}$$

- In ogni istante di tempo dt infinitesimo, da una superficie dS (parte infinitesima dell'intera superficie che contiene il campo f del fluido), passerà, trasportata dal campo di velocità $\vec{u}$ del fluido, una quantità df pari a:

$$df = \mathcal{Q} dV = \mathcal{Q} d\vec{l} \cdot d\vec{S} = -\mathcal{Q} \vec{u} \cdot d\vec{S} dt$$

- dove il segno - tiene conto del fatto che se la $\vec{u}$ è orientata verso l'esterno, si ha una **diminuzione** del campo f all'interno del volume, mentre se $\vec{u}$ è orientata verso l'interno si ha un **aumento** di f (il campo di velocità trasporta la quantità all'esterno o all'interno del volume di fluido)
- Dividendo per dt e integrando sull'intera superficie che racchiude il fluido:

$$\frac{df}{dt} = -\int_S \mathcal{Q}\vec{u} \cdot d\vec{S} \tag{1}$$



Conservazione della massa

- In analogia con quanto appena detto, la massa che entra o esce in un volume di fluido si può scrivere:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \tag{2}$$

- per cui, la massa totale, risulta:

$$M_{\mathrm{TOT}} = \int_V \rho dV$$

- Avremo quindi per la (1) (con $\mathcal{Q} = \rho$ e $f = m$):

$$\frac{dM_{\mathrm{TOT}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\int_S (\rho\vec{u}) \cdot d\vec{S} \tag{3}$$

- Dal teorema di Gauss, per una generica quantità vettoriale $\vec{X}$:

$$\int_S \vec{X} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{X} dV$$

Conservazione della massa

- Applicando il teorema alla relazione (3):

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\int_V \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV$$

- Sappiamo dall'analisi che una derivata si può portare sotto il segno di integrale tramite la relazione:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \text{termini dovuti alla variazione di } V \text{ nel tempo}$$

- Poiché nel nostro caso V è fissato:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_V \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV$$

Conservazione della massa

- da cui si ottiene:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV$$

- ed essendo il volume V del tutto generico:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \tag{4}$$

- Tenendo presente le proprietà degli operatori vettoriali e la definizione di derivata convettiva, possiamo scrivere la stessa equazione nella forma alternativa:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{5}$$

Conservazione della massa

- che ci dice che se la densità si mantiene costante: $\frac{d\rho}{dt} = 0$ si ha:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

cioé il campo di velocità è solenoidale.

- Nota che questa condizione equivale a dire che la densità rimane costante lungo le linee di flusso del campo di velocità, vale a dire che la densità può anche variare punto per punto. Ad es., un campo di densità stazionario ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) in cui il fluido si muove in direzione perpendicolare al gradiente della densità ($\vec{u} \cdot \nabla \rho = 0$), é comunque un campo incomprimibile in cui la densità non varia lungo le linee di flusso del moto.

Equazione del momento

- Il momento per unità di volume di una massa dm è:

$$\frac{d\, m\vec{u}}{dV} = \rho\vec{u}$$

e può variare a causa di:

1. flusso di momento attraverso le pareti del volume:

$$-\int_S (\rho\vec{u})\vec{u} \cdot d\vec{S}$$

come nel caso precedente;

2. sul volume di fluido agisce una accelerazione esterna $\vec{\alpha}$:

$$\int_V \rho\vec{\alpha} dV$$

3. ci sono forze di superficie (interne) che trasferiscono impulso attraverso la superficie:

$$\int_S \bar{\bar{\bar{\mathcal{P}}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} \quad \text{con: } \bar{\bar{\bar{\mathcal{P}}}} \; = \; \text{tensore di pressione}$$

Equazione del momento

- Sommando i vari termini avremo:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{u}dV = -\int_S (\rho\vec{u})\vec{u}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \\ + \int_V \rho\vec{\alpha}dV + \int_S \bar{\bar{\mathcal{P}}}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}}$$

- Poichè il volume non varia nel tempo avremo, anche in questo caso:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{u}dV = \int_V \frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t}dV$$

- Conviene lavorare con gli indici, usando la notazione di Einstein:

$$\int_V \frac{\partial\rho u_i}{\partial t}dV = -\int_S (\rho u_i)u_j dS_j + \int_V \rho\alpha_i dV + \\ + \int_S \mathcal{P}_{ij}dS_j$$

Equazione del momento

- Il teorema di Gauss diventa:

$$\int_S X_j dS_j = \int_V \frac{\partial X_j}{\partial x_j} dV$$

- che, portando a sinistra il flusso di momento, ci dà:

$$\int_V \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} dV + \int_S \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} dV = \int_V \rho \alpha_i dV + \int_V \frac{\partial \mathcal{P}_{ij}}{\partial x_j} dV$$

- Tenendo conto del fatto che V è generico:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho \alpha_i + \frac{\partial \mathcal{P}_{ij}}{\partial x_j} \tag{6}$$

Equazione del momento

- Scrivendo la derivata del prodotto e usando l'equazione di continuità della massa (4), la (6) diventa:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho \alpha_i + \frac{\partial \mathcal{P}_{ij}}{\partial x_j} \tag{7}$$

- che è l'Equazione del momento.
- Scritta in forma vettoriale:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \cdot \bar{\bar{\mathcal{P}}} + \rho \vec{\alpha} \tag{8}$$

Equazione di Navier-Stokes

- Per ottenere l'Equazione di Navier-Stokes dobbiamo esprimere il tensore di pressione $\mathcal{P}_{ij}$ nella forma di Stokes:

$$\mathcal{P}_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta ij \tag{9}$$

cioè: pressione isotropa p + sforzi viscosi:

- In prima approssimazione, i due coefficienti di viscosità (*shear* e *bulk*) sono legati dalla relazione:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

- Calcoliamo: $\frac{\partial \mathcal{P}_{ij}}{\partial x_j}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}_{ij}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \end{aligned}$$

Equazione di Navier-Stokes

- Sostituendo questo termine nella (7):

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho \alpha_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

- che può riscriversi in forma vettoriale come:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \rho \vec{\alpha} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) \qquad (10)$$

  che è l'Equazione di Navier-Stokes.

- Usando la derivata convettiva e dividendo per ρ:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{\alpha} + \frac{\mu}{\rho} \left[\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) \right]$$

Equazione di Navier-Stokes

- Per un fluido incomprimibile:

$$\rho = \rho_0 = \text{costante}; \qquad \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

- da cui si ottiene:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \vec{\alpha} - \frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \tag{11}$$

essendo: $\nu = \mu/\rho_0 =$ viscosità cinematica.

Equazione dell'energia

- In un fluido abbiamo che l'energia contenuta in un volume può essere solo di due tipi:
  1. cinetica: $\frac{1}{2}\rho u^2$
  2. termica (energia interna): $\rho c_v T$
- Tale energia, nell'unità di tempo, può variare perché:
  1. c'è un flusso di energia (ordinata) dalle pareti;
  2. c'è un flusso di calore dalle pareti;
  3. le forze esterne compiono lavoro sul fluido;
  4. le forze di pressione (interne) compiono lavoro.

Equazione dell'energia

- Riassumendo, posto:

$$\rho\epsilon = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho c_v T$$

- avremo:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\epsilon dV = \int_V \frac{\partial \rho\epsilon}{\partial t} dV =$$

$$= \begin{cases} -\int_S \rho\epsilon\vec{u}\cdot d\vec{S} & \text{flusso di energia attraverso } S \\ -\int_S \vec{q}\cdot d\vec{S} & \text{flusso di calore} \\ +\int_S u_i \mathcal{P}_{ij} dS_j & \text{lavoro delle forze di pressione} \\ +\int_V \rho\vec{\alpha}\cdot\vec{u} dV & \text{lavoro delle forze esterne} \end{cases}$$

Equazione dell'energia

- Sviluppando il termine a sinistra:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho c_c T\right] dV = \frac{1}{2}\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} u_i u_i dV + \int_V \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dV +$$
$$+ \int_V \frac{\partial \rho c_V T}{\partial t} dV = -\int_S \left[\frac{1}{2}\rho u_i u_i + \rho c_V T\right] u_j dS_j - \int_S q_j dS_j +$$
$$+ \int_S u_i \mathcal{P}_{ij} dS_j + \int_V \rho \alpha_j u_j dV$$

- Usando il teorema di Gauss, trasformiamo gli integrali di superficie in integrali di volume:

$$\frac{1}{2}\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} u_i u_i dV + \int_V \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial \rho c_V T}{\partial t} dV =$$
$$= -\int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{2}\rho u_i u_i u_j + \rho c_V T u_j\right] dV - \int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV +$$
$$+ \int_V \frac{\partial u_i \mathcal{P}_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho \alpha_j u_j dV$$

- Eseguiamo ora le derivate dei prodotti, ottenendo:

$$\frac{1}{2}\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} u_i u_i dV + \underbrace{\int_V \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dV}_{(1)} + \int_V \frac{\partial \rho c_V T}{\partial t} dV =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_V \frac{\partial \rho}{\partial x_j} u_i u_i u_j dV - \underbrace{\int_V \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j dV}_{(2)} +$$

$$-\frac{1}{2}\int_V \rho u_i u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dV - \int_V \frac{\partial \rho c_V T u_j}{\partial x_j} dV +$$

$$-\int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV + \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathcal{P}_{ij} dV + \underbrace{\int_V u_i \frac{\partial \mathcal{P}_{ij}}{\partial x_j} dV}_{(3)} + \underbrace{\int_V \rho \alpha_j u_j dV}_{(4)}$$

- Il nostro obiettivo è di ottenere una equazione per T. Cerchiamo quindi di eliminare il termine di energia cinetica usando l'equazione di Navier-Stokes e l'equazione di continuità.

Equazione dell'energia

- Dall'equazione di Navier-Stokes abbiamo:

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho \alpha_i + \frac{\partial \mathcal{P}_{ij}}{\partial x_j}$$

- Moltiplicando membro a membro per u_i e integrando sul volume abbiamo:

$$\underbrace{\int_V \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dV}_{(1)} + \underbrace{\int_V \rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV}_{(2)} =$$

$$= \underbrace{\int_V \rho u_i \alpha_i dV}_{(4)} + \underbrace{\int_V u_i \frac{\partial \mathcal{P}_{ij}}{\partial x_j} dV}_{(3)}$$

- Sottraendo membro a membro le ultime due relazioni, i termini (1), (2), (3), (4) si cancellano (le forze esterne aumentano l'energia cinetica, ma non la temperatura!)

- I termini che rimangono nell'equazione sono quindi:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} u_i u_i dV}_{(5)} + \int_V \frac{\partial \rho c_V T}{\partial t} dV = -\underbrace{\frac{1}{2}\int_V \frac{\partial \rho}{\partial x_j} u_i u_i u_j dV}_{(6)} -$$

$$-\underbrace{\frac{1}{2}\int_V \rho u_i u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dV}_{(7)} - \int_V \frac{\partial \rho c_V T u_j}{\partial x_j} dV - \int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV + \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathcal{P}_{ij} dV$$

- Portando i termini (6) e (7) a primo membro e mettendo in evidenza $u_i u_i$:

$$\frac{1}{2}\int_V \overbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)}^{=0 \text{ dall'equazione di continuità}} u_i u_i dV + \int_V \frac{\partial \rho c_V T}{\partial t} dV =$$

$$-\int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV + \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathcal{P}_{ij} dV - \int_V \frac{\partial \rho c_V T u_j}{\partial x_j} dV$$

Equazione dell'energia

- Portando i vari termini sotto un unico integrale, poiché il volume V è generico:

$$\frac{\partial \rho c_V T}{\partial t} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathcal{P}_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho c_V T u_j\right] \qquad (12)$$

- Il termine a sinistra, usando l'equazione di continuità, può scriversi:

$$\frac{\partial \rho c_V T}{\partial t} = \underbrace{-\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j} c_V T}_{(8)} - \underbrace{u_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j} c_V T}_{(9)} + \rho\frac{\partial c_V T}{\partial t}$$

- mentre l'ultimo termine a destra è:

$$\frac{\partial \rho c_V T u_j}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x_j} u_j c_V T}_{(9)} + \underbrace{\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j} c_V T}_{(8)} + \rho u_j \frac{\partial c_V T}{\partial x_j}$$

Equazione dell'energia

- Sostituendo nell'equazione (12) i termini (8) e (9) si cancellano e otteniamo:

$$\rho \frac{\partial c_V T}{\partial t} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathcal{P}_{ij} - \rho u_j \frac{\partial c_V T}{\partial x_j}$$

- Il termine q_j si può ottenere dalla legge di Fourier:

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T \qquad \kappa = \text{coefficiente di diffusione termica}$$

- da cui:

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial q_j}{\partial x_j} = -\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}$$

Equazione dell'energia

- Il termine $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathcal{P}_{ij}$ si può calcolare esplicitando la forma di Stokes di $\mathcal{P}_{ij}$ dalla (9):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathcal{P}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left[-p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta ij\right] =$$
$$= -p\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)^2$$

- Si può far vedere che:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Equazione dell'energia

- Abbiamo quindi, infine:

$$\rho\frac{\partial c_V T}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial c_V T}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j} - p\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \Phi \tag{13}$$

- dove:

$$\Phi = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)^2$$

- Questa equazione può scriversi anche in forma vettoriale:

$$\rho\frac{\partial c_V T}{\partial t} + \rho(\vec{u}\cdot\nabla)(c_V T) = \kappa\nabla^2 T - p\nabla\cdot\vec{u} + \Phi \tag{14}$$

Equazione dell'energia

- Nel caso incomprimibile, i termini in $\nabla \cdot \vec{u}$ scompaiono e l'equazione si può scrivere, usando la derivata convettiva:

$$\rho \frac{dc_V T}{dt} = \kappa \nabla^2 T + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$

- Alle equazioni trovate (continutà, momento, energia) va aggiunta una equazione di stato, ad es. facendo l'ipotesi di gas perfetto:

$$p = \rho \tilde{R} T$$

che ci dà la relazione che lega p nell'equazione del momento, a T, nell'equazione dell'energia.

Equazioni di stato "alternative"

- In taluni casi (ad esempio nel caso dei moti convettivi che vedremo in seguito) è più conveniente usare la legge di Gay-Lussac per la dilatazione termica:

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha_T(T - T_0) + \alpha_S(S - S_0)] \tag{15}$$

a cui è stato aggiunto un termine dovuto alla variazione del volume con la salinità dell'acqua/aria. Questo termine è importante soprattutto nel caso degli oceani, tuttavia necessita di una equazione aggiuntiva per le variazioni di S nel tempo, che generalmente viene posta sotto forma di una equazione di diffusione:

$$\frac{dS}{dt} = \kappa_S \nabla^2 S$$

intendendo che le molecole di sale diffondono in quelle di acqua/aria tendendo a rendere omogeneo tutto il composto.

- Noi ignoreremo sistematicamente questo termine, ma useremo nel seguito la (15) con $S = S_0 = 0$.

Caso incomprimibile

- Nota come, nel caso incomprimibile, l'equazione dell'energia non sia di fatto necessaria, in quanto la condizione di solenoidalità del campo di velocità ci fornisce automaticamente una equazione per la pressione. Infatti, prendendo la divergenza dell'**eq. di Navier-Stokes** (11):

$$\nabla \cdot \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \right] = \nabla \cdot \vec{\alpha} - \frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p + \nu \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{u})$$

- ed eliminando i termini che contengono la divergenza di $\vec{u}$ ed esplicitando la pressione:

$$\nabla^2 p = -\rho_0 \nabla \cdot [(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] + \rho_0 \nabla \cdot \vec{\alpha}$$

cioè la pressione è univocamente determinata una volta noto il campo di velocità e la forza esterna.

Fluidi politropici

- In molti casi, l'equazione dell'energia può essere molto complessa da risolvere, contenendo molti termini.
- Una ipotesi spesso molto usata in astrofisica e in fisica dell'atmosfera, laddove l'ipotesi di incomprimibilità non sia fisicamente accettabile, è di supporre che pressione e temperatura siano stratificate secondo la stessa legge, ma con parametri diversi, e i fenomeni avvengano su scale temporali così brevi che gli scambi di calore siano trascurabili.
- In questi casi si può scrivere:

$$p = k\rho^\gamma$$

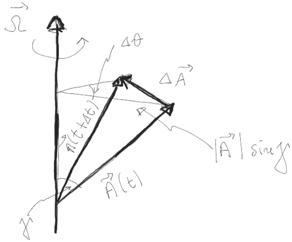
  dove p e ρ rappresentano la stratificazione di pressione e densità.
- γ è detto indice politropico.

Equazioni fluide in un sistema in rotazione

- Per studiare gli effetti della rotazione terrestre sull'atmosfera, dovremo metterci nel sistema non-inerziale costituito dalla terra.
- In un sistema accelerato, ogni oggetto a riposo in un sistema inerziale qualunque ci apparirà accelerato.
- Le equazioni fluide che abbiamo scritto in precedenza sono valide in un sistema di riferimento inerziale. Dovremo quindi trasformarle per portarle in un sistema non inerziale.
- Vediamo, per cominciare, come si trasforma un vettore di modulo costante in un sistema in rotazione con velocità angolare Ω.

Equazioni fluide in un sistema in rotazione

- Sia $\vec{A}$ un vettore t.c. $|\vec{A}| =$ costante.
- Sia γ l'angolo tra $\vec{A}$ e $\vec{\Omega}$



In un Δt piccolo, $\vec{A}$ ruoterà di un angolo $\Delta\theta = |\vec{\Omega}|\Delta t$.

$$\Delta\vec{A} = \vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t) \sim |\vec{A}| \sin\gamma \Delta\theta \hat{n}$$

Ultima modifica: 09:22

dove $\hat{n}$ è un versore perpendicolare sia ad $\vec{A}$ che a $\vec{\Omega}$.

- Possiamo scrivere:

$$\hat{n} = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{A}}{|\vec{\Omega} \times \vec{A}|}$$

- Se $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \frac{d\vec{A}}{dt} = |\vec{A}| \sin\gamma \frac{d\theta}{dt} \frac{\vec{\Omega} \times \vec{A}}{|\vec{\Omega} \times \vec{A}|}$$

- Tenendo conto del fatto che:

$$|\vec{\Omega} \times \vec{A}| = |\vec{\Omega}||\vec{A}| \sin\gamma \quad \text{e} \quad \frac{d\theta}{dt} = |\vec{\Omega}|$$

Equazioni fluide in un sistema in rotazione

- Otteniamo:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

  che vale solo se $|\vec{A}| =$ costante!

- Nota che un osservatore solidale al sistema in rotazione vede $\vec{A}$ fisso, mentre uno nel sistema inerziale vede $\vec{A}$ ruotare, sebbene per entrambi: $|\vec{A}| =$ costante.

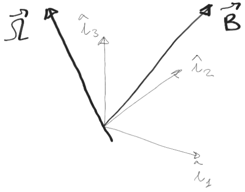
- Questo è ovvio nel sistema che ruota, nel sistema inerziale, invece:

$$\frac{d|\vec{A}|^2}{dt} = 2\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 2\vec{A} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{A}) = 0$$

  perché $\vec{A} \perp (\vec{\Omega} \times \vec{A})$.

- Consideriamo ora un vettore $\vec{B}$ generico, di componenti B_1, B_2 e B_3 rispetto agli assi $\hat{\imath}_1$, $\hat{\imath}_2$ e $\hat{\imath}_3$ di un sistema che ruota con velocità angolare $\vec{\Omega}$.
- Nel sistema in rotazione:

$$\vec{B} = B_1\hat{\imath}_1 + B_2\hat{\imath}_2 + B_3\hat{\imath}_3 \quad \text{con:} \quad B_j = \vec{B}\cdot\hat{\imath}_j, \; j = 1,2,3$$



Quindi:

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_R = \frac{dB_1}{dt}\hat{\imath}_1 + \frac{dB_2}{dt}\hat{\imath}_2 + \frac{dB_3}{dt}\hat{\imath}_3$$

dove il simbolo $()_R$ indica un vettore nel sistema in rotazione, in cui i versori non ruotano, essendo solidali al sistema.

Ultima modifica: 10:08

Equazioni fluide in un sistema in rotazione

- Nel sistema inerziale, sia B_j che $\hat{\imath}_j$ variano:

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_I = \frac{dB_1}{dt}\hat{\imath}_1 + \frac{dB_2}{dt}\hat{\imath}_2 + \frac{dB_3}{dt}\hat{\imath}_3 + B_1\frac{d\hat{\imath}_1}{dt} + B_2\frac{d\hat{\imath}_2}{dt} + B_3\frac{d\hat{\imath}_3}{dt} =$$
$$= \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_R + \vec{\Omega}\times(\vec{B})_R \qquad (16)$$

- Quindi $\vec{B}$ varia in modo diverso nel sistema inerziale ed in quello in rotazione.
- Nota che, invece, il vettore Ω risulta identico nei due sistemi. Infatti, posto $\vec{\Omega}$ al posto di $\vec{B}$ nella (16), abbiamo:

$$\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R$$

che vale **anche se $\vec{\Omega}$ varia nel tempo!**

Equazioni fluide in un sistema in rotazione

- Usiamo ora il risultato ottenuto per descrivere il moto di una particella fluida in un sistema in rotazione:
- Poniamo: $\vec{B} = \vec{r}$, posizione della particella fluida ad un dato istante di tempo:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R + \vec{\Omega} \times (\vec{r})_R$$

che ci dice che la velocità nel sistema inerziale è la somma della velocità nel sistema ruotante più la velocità (di rotazione) che la particella fluida avrebbe se fosse solidale al sistema in rotazione:

$$(\vec{u})_I = (\vec{u})_R + \vec{\Omega} \times (\vec{r})_R$$

- Applichiamo nuovamente la (16) al vettore $(\vec{u})_I$:

$$\left(\frac{d(\vec{u})_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d(\vec{u})_I}{dt}\right)_R + \vec{\Omega} \times ((\vec{u})_I)_R$$

Equazioni fluide in un sistema in rotazione

- Sostituendo la $(\vec{u})_I$ calcolata in precedenza:

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d}{dt}\left[(\vec{u})_R + \vec{\Omega}\times(\vec{r})_R\right]\right)_R + \vec{\Omega}\times\left((\vec{u})_R + \vec{\Omega}\times(\vec{r})_R\right)_R =$$

$$= \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times(\vec{r})_R + \underbrace{\vec{\Omega}\times\frac{d(\vec{r})_R}{dt} + \Omega\times(\vec{u})_R}_{=} + \Omega\times[\Omega\times(\vec{r})_R] =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R}_{(1)} + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times(\vec{r})_R}_{(2)} + \underbrace{2\Omega\times(\vec{u})_R}_{(3)} + \underbrace{\Omega\times[\Omega\times(\vec{r})_R]}_{(4)}$$

- dove i vari termini rappresentano:
    1. accelerazione relativa;
    2. accelerazione dovuta alle variazioni di $\vec{\Omega}$ nel tempo;
    3. accelerazione di Coriolis;
    4. accelerazione centripeta.

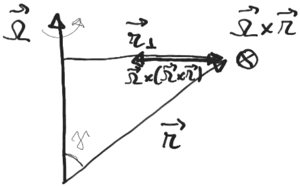
Equazioni fluide in un sistema in rotazione

- Andiamo ora ad esaminare l'importanza dei vari termini che appaiono in questa relazione per l'atmosfera terrestre.
- Il termine:
$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times (\vec{r})_R$$
è dovuto alle variazioni di $\vec{\Omega}$ nel tempo.
- Per i tempi-scala dei fenomeni che ci interessa studiare, questo termine è sempre trascurabile!
- Tuttavia, potrebbe non esserlo per fenomeni che avvengono su tempi scala molto lunghi (i moti secondari della terra possono far variare nel tempo la direzione dell'asse di rotazione)

Equazioni fluide in un sistema in rotazione

- Il termine di accelerazione centripeta può essere scritto nella forma:

$$\vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times (\vec{r})_R] = -|\vec{\Omega}|^2 \vec{r}_\perp$$



Possiamo far vedere che:

$$\vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times (\vec{r})_R] = -\nabla \phi_c$$

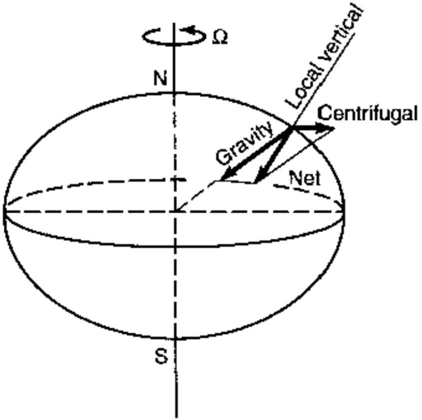
Ultima modifica: 11:30

con:

$$\phi_c = \frac{|\vec{\Omega}|^2 |\vec{r}_\perp|^2}{2} = \frac{|\vec{\Omega} \times \vec{r}_\perp|^2}{2}$$

- Generalmente questo potenziale centrifugo può essere inglobato nel potenziale gravitazionale ⇒ si può definire un potenziale efficace:

$$\Phi_{\text{eff}} = \phi_g + \phi_c$$

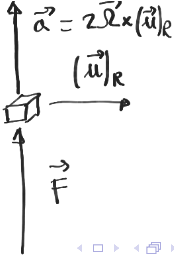


Equazioni fluide in un sistema in rotazione

- In pratica, l'unico termine davvero importante per l'atmosfera, è l'accelerazione di Coriolis:

$$2\vec{\Omega} \times (\vec{u})_R$$

- Questo termine ha alcune proprietà notevoli:
  1. È lineare, essendo $\vec{\Omega}$ costante!
  2. Poiché nel sistema inerziale l'accelerazione $(\vec{a})_I$ deve essere parallela alla risultante delle forze $\vec{F}$ che agiscono sul corpo, la velocità relativa, nel sistema in rotazione deve essere perpendicolare alla forza $\vec{F}$!



Equazioni fluide in un sistema in rotazione

- Vediamo infine come si trasformano le equazioni del moto nel sistema in rotazione:
- Equazione di Navier-Stokes:

$$\rho\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_I = \rho\left[\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R - \phi_c + 2\vec{\Omega}\times(\vec{u})_R\right] = -\nabla p + \rho\nabla\phi_g + \nabla\cdot\mathcal{P}_{ij}$$

- Notiamo ora che i gradienti non cambiano tra il sistema inerziale e quello in rotazione, in quanto la distanza è invariante (e quindi uno spostamento infinitesimo è lo stesso nell'uno e nell'altro sistema, a meno della direzione). Quindi non abbiamo bisogno di specificare in quale sistema scriviamo i gradienti che appaiono nelle forze!
- Notiamo che anche $\mathcal{P}_{ij}$ dipende solo dai gradienti di $\vec{u}$. Richiamando semplicemente $\vec{u}$ la $(\vec{u})_R$:

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p - \rho\nabla\Phi + \nabla\cdot\mathcal{P}_{ij} - 2\vec{\Omega}\times\vec{u} \tag{17}$$

che è l'equazione di Navier-Stokes scritta nel sistema in rotazione!

Equazioni fluide in un sistema in rotazione

- Notiamo infine che, anche le quantità scalari, come i gradienti, sono indipendenti dal sistema scelto (se quello inerziale o quello in rotazione). Di conseguenza, l'equazione di continuità e l'equazione dell'energia rimangono le stesse nei due sistemi: i termini di accelerazione visti in precedenza possono far variare le quantità meccaniche, ma non la densità e le quantità termodinamiche!
- Tuttavia, vale la pena notare che, siccome la $\vec{u}$ varia nel sistema inerziale ed in quello in rotazione, sebbene, per un qualunque scalare f si abbia:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_I = \left(\frac{df}{dt}\right)_R$$

si avrà invece:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_I = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_R - [\vec{\Omega} \times (\vec{r})_R] \cdot \nabla f$$

$$[(\vec{u})_I \cdot \nabla] f = [(\vec{u})_R \cdot \nabla] f + [\vec{\Omega} \times (\vec{r})_R] \cdot \nabla f$$

Sommario delle equazioni

- Le equazioni fluide in un sistema rotante sono perciò:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$
$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi_{\text{eff}} + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - 2\rho\Omega \times \vec{u} \tag{18}$$
$$\rho \frac{\partial c_V T}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)(c_V T) + p \nabla \cdot \vec{u} = \kappa \nabla^2 T + \Phi$$

  più una equazione di stato: $p = \rho \tilde{R} T$ o equivalente.
- Tali equazioni sono complicate, essendo non-lineari, e la loro trattazione è comunque molto complessa.

Semplificazione delle equazioni

- Si possono fare delle ipotesi, abbastanza ragionevoli, basate sulle caratteristiche dei moti atmosferici, per semplificare le equazioni.
- Una prima approssimazione è quella di trascurare i termini di curvatura.
- Normalmente, essendo la terra quasi sferica, la geometria naturale per trattare un problema atmosferico è quella sferica. Tuttavia, invece che studiare il problema **globale** in questa geometria complicata, possiamo assumere di studiare i problemi in un **sistema locale** cartesiano, con gli assi orizzontali nel piano tangente al punto della terra che stiamo studiando e l'asse z verticale lungo il raggio della Terra
- Questo perché le scale tipiche dei moti atmosferici e oceanici sono abbastanza più piccole del raggio terrestre ($\sim$ 6400 km).

Approssimazione di Boussinesq

- Abbiamo visto come, in equilibrio sotto l'azione della pressione e della gravità, l'atmosfera risulti stratificata con l'altezza, sia in pressione che in densità.
- Potremo quindi scrivere:

$$p = p_0(z) + p'(x, y, z)$$
$$\rho = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z)$$

- Altre cause per cui la densità varia negli oceani e nell'atmosfera possono essere:
  1. rimescolamento delle acque con diverso grado di salinità (es. alle foci dei fiumi) o di acque provenienti da strati differenti a causa delle correnti sottomarine;
  2. effetto dei venti nell'atmosfera.
- Nel caso (1), si vede sperimentalmente che le variazioni di densità sono inferiori al 2%, nel caso (2) inferiori al 5%. Cioé, se si eccettuano le variazioni di densità dovute alla stratificazione, le variazioni di densità sono molto piccole, quindi sono trascurabili!

Approssimazione di Boussinesq

- L'approssimazione di Boussinesq consiste quindi nel ritenere trascurabili le variazioni di densità (e quindi di volume) del fluido dappertutto, tranne che nel termine di gravità, che produce la stratificazione di pressione.
- Potremo quindi descrivere il fluido come incomprimibile:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \rho_0$$

nell'equazione di continuità e in tutti gli altri termini delle altre equazioni, tranne nei termini che inducono la stratificazione di pressione nell'equazione del momento e nell'equazione di stato!
- Nell'**equazione del momento** avremo invece:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho_0 (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p_0 - \nabla p' - (\rho_0 + \rho')\nabla \Phi_{\text{eff}} + \\ + \mu \nabla^2 \vec{u} - 2\rho \Omega \times \vec{u}$$

- e nell'equazione di stato: $p_0 + p' = (\rho_0 + \rho')\tilde{R}T$

Approssimazione di Boussinesq

- Tuttavia, la stratificazione di pressione e di densità devono soddisfare le:

$$
\begin{aligned}
0 &= -\nabla p_0 + \rho_0 \nabla \Phi_{\text{eff}} \\
p_0 &= \rho_0 \tilde{R} T
\end{aligned}
$$

- Di conseguenza, le equazioni (18) diventano:

$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot \vec{u} = 0 \\
&\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\rho}{\rho_0}\vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u} - 2\Omega \times \vec{u} \\
&\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T = \kappa_T \nabla^2 T + \frac{1}{c_V \rho_0}\Phi \\
&p = \rho \tilde{R} T
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Approssimazione di Boussinesq

dove, nelle (19), abbiamo:

1. eliminato i termini in $\nabla \cdot \vec{u} = 0$;
2. diviso per ρ_0 l'equazione del momento e rinominato semplicemente ρ la ρ' e p la p';
3. ri-nominato semplicemente: $\vec{g} = -\nabla\Phi_{\text{eff}}$ come la gravità modificata dal potenziale centrifugo che, in ogni caso, è comunque diretta lungo la verticale, per quanto detto!;
4. introdotto la viscosità cinematica: $\nu = \mu/\rho_0$
5. diviso per $c_V \rho_0$ l'equazione dell'energia e introdotto la conducibilità termica: $\kappa_T = \kappa/(c_V \rho_0)$.

Ulteriori semplificazioni

- Al fine di introdurre ulteriori semplificazioni nelle equazioni, conviene scriverle per le singole componenti del campo di velocità: $\vec{u} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u - f_\star w + fv \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v - fu \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{g\rho}{\rho_0} + \nu\nabla^2 w + fu \\
\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} &= \kappa_T\nabla^2 T + \frac{1}{c_V\rho_0}\Phi \\
p &= \rho\tilde{R}T
\end{aligned}
\tag{20}
$$

- dove:

$$f = 2\Omega \sin\theta \leftarrow \textit{parametro di Coriolis}$$
$$f_\star = 2\Omega \cos\theta \leftarrow \textit{parametro di Coriolis reciproco}$$

- Per il momento, ci disinteressiamo dell'equazione dell'energia e dell'equazione di stato perché, per quanto detto in precedenza, nel caso incomprimibile, che corrisponde all'approssimazione di Boussinesq, non sono necessarie. Le riprenderemo quando necessario.
- Al fine di eseguire le semplificazioni ulteriori di cui parlavamo, conviene raggruppare in una tabella le scale caratteristiche tipiche di atmosfera e oceano per poter stabilire l'importanza reciproca dei vari termini.

- Scale caratteristiche per atmosfera e oceano:

Variabile	Scala	Atmosfera	Oceano
x, y	L	100 km	10 km
z	H	1km	0.1 km
t	T	$\geq 4 \times 10^4$ s $\sim \frac{1}{2}$giorno	$\geq 9 \times 10^4$ s $\sim$ 1giorno
u, v	U	10 m/s	0.1 m/s
w	W		
p	P		
ρ	$\Delta\rho 0$	qualche % di ρ_0	idem
Ω	Ω	$\sim 7 \times 10^{-5}$	idem
g	g	~ 10 m/s^2	idem

Equazioni fluide semplificate

- Le equazioni che otteniamo, in definitiva, dopo le numerose semplificazioni, sono:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + fu &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g
\end{aligned}
\tag{21}
$$